

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
*18 febbraio 1923.*  
—————

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Geofisica.** — *L'anomalia della Gravità sulla Terra.* Nota del Socio prof. FEDERICO SACCO.

Uno dei problemi sulla cui interpretazione vi è tuttora disaccordo fra i geofisici, è quello che riguarda il fenomeno della *anomalia della gravità* alla superficie del globo terrestre e che consiste nel fatto che, riguardo al valore teorico, si constata in generale un difetto di gravità sui Continenti, e viceversa un eccesso di gravità sugli Oceani; il che porta ad ammettere che complessivamente ha maggior densità la materia litoidea sotto i bacini oceanici che non quella costituente le masse continentali.

Detto fenomeno porterebbe ad una specie di parziale compensazione gravitazionale complessiva nella crosta terrestre tra le masse elevate continentali e le masse depresse suboceaniche, per cui la forza di gravità tenderebbe ad essere quasi eguale dovunque (se ridotta al livello marino) come se il geoido non presentasse rilievi e depressioni.

Tale è il fatto la cui spiegazione è tuttora problematica per quanto assai discussa e variamente prospettata dai vari autori; la teoria isostatica vi è in parte connessa e concordante, ma essa, se anche ammessa come vera, non spiega il fatto in sé che deve avere una causa originaria, generale, fondamentale, profonda e quindi difficile a scoprire o accertare.

Ma se l'avviluppo, per quanto incompleto, idrosferico e specialmente la potentissima e generale coltre stratosferica del globo terrestre, nonchè gli svariati fenomeni geologici compiutisi su di esso attraverso centinaia di mi-

lioni di anni, ci mascherano ormai quelle parti profonde della Litosfera dove è probabilmente insita la causa del fenomeno in questione, parmi si possa tentarne l'indagine prendendo in esame un altro astro che si presenti in condizioni di osservazione migliore e precisamente il globo lunare che, mancando di aria e di acqua, potè conservare e ci lascia quindi ancora oggi osservare (data la sua vicinanza) la sua primitiva crosta di consolidamento.

Rimandando per dettagli ad un mio precedente *Essai schématique de Sélénologie* (Turin, 1907, con carta e sezioni selenologiche e numerose fototipie) mi limito qui a ricordare, per quanto riguarda l'argomento in questione, che l'esame della superficie lunare e varie considerazioni lasciano supporre che le sue aree superficiali irregolari frastagliate, apparentemente biancastre, più o meno elevate, le cosiddette *Terrae*, rappresentino la superficie scoriacea di prima consolidazione, durante il suo raffreddamento crostale; aree che (per quell'analogia colle formazioni terrestri che è suggerita dall'unità della materia e delle azioni cosmiche) possono ragionevolmente considerarsi come di costituzione prevalentemente acida, silicica o silico-alluminifera, forse un po' analoga al tipo litoide terrestre detto trachitico (l. s.), cioè analoga al *Sal* di Suess, e probabilmente con costituzione fisica a tipo piuttosto scoriaceo, bolloso, forse parzialmente pomiceo, per grande sviluppo di gas, ecc. <sup>(1)</sup>.

Invece le aree della superficie lunare che si presentano come zone pianeggianti, più o meno depresse rispetto alle *Terrae*, subuniformi, di tinta bruno-nerastra, dette generalmente ma impropriamente *Maria*, devono rappresentare regioni di ultima consolidazione nel raffreddamento della crosta selenica; tali aree possono considerarsi come di costituzione (relativamente alle *Terrae*) più basica, più silico-magnesiaca, probabilmente un po' analoga al tipo litoide terrestre detto basaltico (cioè al *Sima* di Suess), probabilmente con costituzione fisica, rispetto alle *Terrae*, più compatta, più micromera, forse in parte anche jaloide-ossidianaica, certo meno bollosa per cause fisico-chimiche, nonché per relativo esaurimento dei gas endogeni.

Cioè nel graduale raffreddamento e consolidamento della superficie lunare dovette verificarsi dapprima sul magma generale una vasta ed irregolare formazione crostale scoriacea (le *Terrae*) che io appellai perciò primaria; solo più tardi le aree, sia relativamente piccole (*Circhi*) sia immense (*Maria*), rimaste ancora a lungo pastose e meno bollose (anche per graduale esaurimento dei gas interni), a superficie pianeggianti, speciali regioni abbassatesi intanto più o meno notevolmente rispetto alle *Terrae* (da cui sono spesso delimitate nettamente per mezzo di linee di frattura seguite da sprofondamenti anche multipli, successivi), poterono consolidarsi, in due periodi successivi principali, che appellai secondari e terziari (nomi che non

(<sup>1</sup>) Ricordo in proposito che (come accenna L. Michel in *Études et notes de Géologie appliquée*, 1922) speciali esperienze sui raggi infrarossi hanno mostrato che la riflessione luminosa si compie sulle rocce lunari come sulle nostre lave terrestri.



corrispondono però per nulla a quelli dei geologi) costituendo così formazioni subregolari, pianeggianti, i *Maria* lunari.

Ciò posto e ritornando alla nostra Terra è probabile che nella sua originaria, primitiva formazione crostale sianvisi verificati fenomeni un po' analoghi a quelli lunari sovraccennati; cioè dapprima dovettero delinearsi fin dall'origine certe aree (consimili alle *Terrae* seleniche) di prima consolidazione scoriacea a prevalente costituzione acida, silico-alluminosa (*Sal*) per ossidazione dei metalli più leggeri; regioni che anche in seguito, malgrado mille successive modificazioni, erosioni, coperture sedimentarie e fenomeni tettonici d'ogni genere, costituirono però sempre l'irregolare nucleo o fondamento più o meno profondo dei futuri Continenti, certo assai modificati da quanto presentavansi in origine. Vedasi a tale riguardo la carta annessa al mio antico studio di un *Essai sur l'Orogénie de la Terre* (Turin, 1895), dove sono delineati come Massicci antichi (Horst, Moli, Boucliers, ecc.) le aree che, per quanto siano state decorticate dalla primitiva scoria superficiale ed abbiano subito deposizioni, movimenti e modificazioni notevolissime, possono dare una lontana idea della approssimativa posizione delle primitive *Terrae* della crosta terrestre.

Invece molte altre aree (probabilmente assai più estese, relativamente, che sulla superficie selenica, per differenze chimiche proporzionali o per maggior durata della fase magmica del globo terrestre a causa della sua maggiore massa e quindi maggiore riserva di calore, ecc.) rimasero ancora lungamente allo stato magmatico (in relazione più o meno diretta colle zone fluide profonde) costituendo così amplissime zone magmiche, forse con imponenti espansioni endogene; nello stesso tempo tali zone deprimevansi coll'accompagnamento di grandiose fratture periferiche, in modo da abbassarsi talora anche di parecchie migliaia di metri rispetto alle aree scoriacee prima formate, consolidandosi però infine anch'esse e costituendo così grandi regioni depresse, più o meno pianeggianti, consimili ai *Maria* lunari, a struttura compatta e costituzione silico-magnesiaca (*Sima*) più o meno ferrifera; regioni che subirono in seguito un'infinità di modificazioni di erosioni, di imponenti deposizioni sedimentarie e poi di relativi fenomeni tettonici, ma in complesso continuando sempre a costituire prevalentemente le aree depresse del geode e perciò quelle appunto che, per le precipitazioni atmosferiche, diventarono le principali aree oceaniche del globo terrestre.

L'angolosità dei limiti di certi *Maria* lunari (*Mare Crisium*, *M. Serenitatis*, *M. Nectaris* ecc.) la vediamo ripetersi con qualche analogia nella limitazione di certe aree oceaniche terrestri (specialmente col tipo circumatlantico), ciò che delineai nel lavoro sopra *Les Lois fondamentales de l'Orogénie de la Terre* (Turin, 1906), attribuendola ad un fenomeno pseudoseptarico e facendo osservare la corrispondenza di certe angolosità tra margini continentali opposti anche lontani (vedi pag. 10-11 e fig. 4 della tavola an-

nessa a detto lavoro), senza voler con ciò concludere trattarsi di parti continentali prima riunite ed allontanatesi poi dopo fratturazione, come espone il Wegener nel suo lavoro sopra *Die Entstehung der Kontinente u. Ozeane*, 1920.

\* \* \*

Ciò premesso, passando ora a considerazioni gravitazionali, notiamo anzitutto, continuando nella interessante comparazione seleno-geologica, che il globo lunare ha la densità di 3,4 mentre quello terrestre ha la densità di 5,5. Tale fatto è spiegabile coll'accentrazione degli elementi atomici più pesanti verso il nucleo della massa geica a danno, direi, di quella selenica, all'epoca in cui esse costituivano un ammasso cosmico complessivamente unico, probabilmente ancora gazofo (<sup>1</sup>). Detta differenza di densità tra il globo geico e quello terrestre, contribuì certamente, assieme alla molto minore massa lunare rispetto a quella terrestre, a rendere la forza di gravità sulla superficie della Luna assai minore che non sulla superficie della Terra; ci spiega inoltre vari fenomeni selenici caratteristici, come la grandiosità del fenomeno di ribollimento che plasmò gran parte della superficie lunare, le famose zone luminose che irradiansi per centinaia ed anche oltre mille chilometri dal centro di origine endogeno, e fors'anche in parte i curiosi corrugamenti ondulatamente subparalleli dei *Maria*. A questo proposito è da ricordare che tali corrugamenti ondulati (di cui tracciai i principali nella carta selenografica annessa a detto mio *Essai de Sélénologie*, potrebbero fors'anche essere in parziale relazione col fatto che la forza d'attrazione geo-solare sulla superficie lunare è notevolmente più grande che non quella lunisolare così nota come generatrice della marea sulla Terra; quindi è probabile che tale intensa azione geo-solare, combinata colla minore gravità esistente alla superficie lunare (quindi con efficacia assai maggiore che l'azione lunisolare sulla Terra), abbia potuto influire, a suo tempo, sul magma fluido dei *Maria* in modo tale da facilitarne i corrugamenti addensatisi e consolidatisi in seguito come oggi vediamo.

Inoltre la densità, solo 3,4 circa, del globo lunare, mentre ci prova in modo sicuro che esso è complessivamente costituito di materiali meno pesanti che non quelli del globo terrestre, ci fa pensare che probabilmente vi mancano o, piuttosto, vi scarseggiano gli elementi metallici; per cui è pro-

(<sup>1</sup>) È interessante notare che un aumento un po' analogo di densità, probabilmente spiegabile per analoga causa, riscontrasi nella serie dei Pianeti del sistema solare, da quello più interno (Mercurio) con densità 6,2, per cui si può supporre sia assai più metallifero (ferriero) che la Terra, a quello esterno (Marte) con densità di circa 3,8 prossima a quella della Luna (3,4); per cui è probabile che questi due ultimi astri abbiano costituzione complessiva un po' analoga; quanto ai Pianeti esterni alla zona degli Asteroidi, essi hanno bensì una densità piccola (0,6-1,4), ma ciò è anche in parziale connessione collo stato loro essenzialmente gazofo, come anche quello del Sole, che ha pure una densità bassa, cioè di 1,4.



babile che le formazioni prevalentemente acide e scoriacee delle *Terrae* abbiano solo una densità di circa 2, mentre quelle, più compatte e più basiche, dei *Maria*, possano avere una densità di 2-3, supponendo che un po' di materiale più pesante, metallico o simile, adunatosi specialmente in profondità costituisca nell'interno del globo selenico una Barisfera della densità di 4-5 all'incirca.

Se così, o ad un dipresso, stanno le cose, ne risulterà naturalmente che alla superficie del globo lunare si debba verificare da luogo a luogo una anomalia di gravità un po' analoga a quella che verificasi sul globo terrestre nel senso che la gravità deve essere in complesso di minore intensità sulle *Terrae* che non sui *Maria*.

Passando ora alla Terra, è noto che la densità (poco più di 5,5, quasi 5,6) dell'intero globo terrestre è assai maggiore di quella complessiva (2,6-2,7) della Litosfera conosciuta; ciò ci obbliga ad ammettere che parte dell'interno della Terra sia di costituzione metallica, probabilmente piuttosto ferri-fera (specialmente verso il centro) o ferro-nichelifera (zona nifica o *Nife* di Suess), come ci indicherebbero le Meteoriti (olosideritiche), i fenomeni magnetici ecc., costituendo la cosiddetta *Barisfera*, *Metallmosfera* o *Centrosfera* della densità media di 6-7 e forse anche di oltre 8 in certe zone per le enormi pressioni, ecc.

Sopra questa grandiosa Barisfera, costituente forse oltre i  $\frac{3}{4}$  circa del globo terrestre, debbono esistere sfere sempre meno pesanti (verso l'alto), meno metallifere (dello spessore complessivo di oltre  $\frac{1}{5}$  circa del raggio terrestre); di varia composizione sia chimica (piuttosto basiche, cioè zone silico-magnesiache o peridotico-ferri-ferre), sia fisica (dense ed in parte magmatiche), come la supposta *zona plastica*, con passaggio alla *Pirosfera*, ecc., che può essere anche la *zona di compensazione isostatica*, con densità di 3-4 nella parte superiore.

Da tale zona magmatica si deve giungere, sempre con transizioni graduali, alla nota *Litosfera* (di densità varia da 2 a 3 circa), avente uno spessore probabile di un centinaio di Km. circa, coperta in gran parte da un velo di *Idrosfera* (di densità 1) dello spessore massimo di 10 Km.; avvolto il tutto dalla gassosa *Atmosfera* della densità solo di 0,0013 in basso e disperdentesi in alto (a parecchie centinaia di chilometri dalla superficie terrestre) coll'Idrogeno, l'Elio, il Geocoronio, ecc., sempre più rarefatti verso gli spazi interplanetari.

Tutto ciò è in relazione evidentemente con quella legge generale di separazione dei materiali per peso specifico (cioè di una naturale differenziazione gravifica degli elementi chimici) durante la condensazione della primitiva massa cosmico-geica, che già ha potuto spiegarci la differenza di densità esistente tra il globo terrestre e quello lunare.

Limitandoci ora alla Litosfera, da quanto si è esposto precedentemente risulta naturale che, come sulla superficie lunare, anche sulla superficie terrestre, malgrado i tanti fenomeni di alterazioni, di erosioni, di trasporti, di depositi (che costituiscono uno speciale sviluppo *stratosferico* sovrapposto al residuo di quello fondamentale corticale originario), nonchè di tettonica, ecc., siasi ancora conservata in parte, specialmente a qualche profondità, una differenza di densità tra:

1°) le regioni litosferiche che prima si costituirono con prevalenza acida, silico-alluminosa (*Sal*) di natura pseudo granitoide-trachitoide, ecc. (con analogia alle *Terrae* lunari e formando tuttora il fondamento principale dei Continenti terrestri, pur variatisi assai nei diversi periodi geologici), con densità media complessiva di circa 2,5;

e, 2°) le regioni invece che, rimaste più a lungo allo stato magmatico (in connessione quindi coi materiali fluidi profondi di densità un po' maggiore di quelli superficiali primi consolidati) e frattanto gradatamente abbassandosi, si solidificarono più tardi a costituire (come i *Maria* lunari) estese formazioni di natura prevalentemente basica, silico-magnesiaca più o meno ferriero-peridotica (*Sima*) pseudo basaltoide, compatta, ecc., quindi con densità media complessiva superiore a 3; regioni che, per la depressione orografica che le accompagnò, divennero naturalmente e costituirono poi sempre, almeno in complesso, il *substratum* delle aree oceaniche principali.

Ecco quindi come in tal modo, a parte le infinite variazioni ed irregolarità connesse, sia ad irregolarità originarie di consolidamento crostale, sia a svariati fenomeni successivi, sedimentari, tettonici, plutonico-vulcanici ecc., sia a varia distribuzione di certe rocce basico-ferriero nella Litosfera, ecc., parmi si possa spiegare abbastanza naturalmente, per originaria differenza di densità nelle masse crostali, il fenomeno generale di quella specie di anomalia che si riscontra ora sulla superficie terrestre tra le regioni continentali, con difetto e quelle oceaniche, con eccesso di gravità, sul valore teorico.



**Fisica.** — *Sulla viscosità dielettrica e l'effetto Born nella ipotesi dei dipoli permanenti o in quella della polarizzabilità molecolare.* Nota del Socio O. M. CORBINO.

La ipotesi di Larmor che le molecole dei dielettrici costituiscano, anche in assenza di un campo esterno, dei veri dipoli elettrici, con un momento elettrico permanente e di valore indipendente dal campo esterno, fu sviluppata da Debye e da M. Born, dopo che il Langevin ne aveva dedotta la spiegazione della birifrangenza elettrica e magnetica <sup>(1)</sup>. Ma a una spiegazione egualmente soddisfacente si giunge ammettendo che le molecole abbiano in diverse direzioni una diversa possibilità di assumere la polarizzazione per virtù di un campo esterno.

Le previsioni quantitative sulla legge di variazione della costante dielettrica e della birifrangenza con la temperatura non sono proprio identiche secondo le due teorie, ma differiscono così poco che non è stato possibile decidere in modo sicuro, anche ricorrendo a esperienze assai difficili e complesse, della validità della teoria dipolare <sup>(2)</sup>.

Altri effetti dovuti all'orientamento delle molecole in un campo variabile o rotante sono stati previsti dal Born <sup>(3)</sup> per i dielettrici e da me <sup>(4)</sup> per il caso delle soluzioni colloidalì di idrato ferrico, nella ipotesi di un momento permanente molecolare; questi effetti sono stati anche verificati con l'esperienza <sup>(5)</sup>.

Mi propongo in questa Nota di ricercare se effetti analoghi sono prevedibili partendo dalla seconda ipotesi, della polarizzabilità anisotropa delle particelle; e ciò allo scopo di dedurre, dal confronto con l'esperienza, criteri più sicuri di decisione fra le due teorie.

\*  
\* \*

Supporremo col Langevin che la particella abbia una struttura tipo ellissoide di rivoluzione nei riguardi della polarizzabilità per effetto di un campo esterno, cosicchè essa assuma per effetto di un campo una polarizzazione con coefficiente  $\alpha_1$  se l'asse principale è diretto secondo il campo

<sup>(1)</sup> Langevin, *Le Radium* 7, p. 249; 1910. Debye, *Phys. Z. S.* 13, p. 97; 1912. M. Born, *Ann. d. Phys.* 55 p. 177; 1918.

<sup>(2)</sup> P. Lertes, *Z. S. f. Phys.* 6 p. 257; 1921.

<sup>(3)</sup> Born, *Z. S. f. Phys.* 1, p. 221; 1921.

<sup>(4)</sup> Corbino, *Rend. Lincei*, vol. XXXII, 2° sem., pag. 59; 1923.

<sup>(5)</sup> P. Lertes, *Z. S. f. Phys.* 6, p. 56, 1921.

e con coefficiente  $\alpha_2$  se l'asse è normale al campo. Pertanto se il campo  $h$  è diretto secondo la direzione  $x$  della figura 1, e l'asse della particella

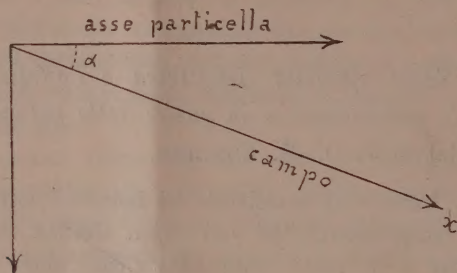


FIG. 1.

forma col campo un angolo  $\alpha$ , si produrrà una polarizzazione  $\alpha_1 h \cos \alpha$  nel senso dell'asse, e una polarizzazione  $\alpha_2 h \sin \alpha$  nel senso normale. Ne risulta una coppia orientatrice avente il momento

$$\begin{aligned} H &= h^2 (\alpha_1 \sin \alpha \cos \alpha - \alpha_2 \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= \frac{h^2}{2} \sin 2\alpha \cdot (\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Supponiamo adesso che il campo vari sinusoidalmente;

$$h = H \sin \omega t$$

e si ponga

$$(1) \quad B = \frac{1}{2} H^2 (\alpha_1 - \alpha_2);$$

si avrà

$$H = B \sin 2\alpha \sin^2 \omega t = \frac{B}{2} \sin 2\alpha (1 - \cos 2\omega t).$$

La coppia si può perciò scomporre in due parti:

$$H^1 = \frac{B}{2} \sin 2\alpha$$

$$H^{11} = -\frac{B}{2} \sin 2\alpha \cos 2\omega t$$

delle quali la prima è indipendente dal tempo.

Riprendendo i ragionamenti svolti nel lavoro citato, data la piccolissima perturbazione apportata dal campo nella distribuzione uniforme delle particelle determinata dall'agitazione termica, si può dedurre che la *concentrazione*  $c$ , relativa all'angolo  $\alpha$  (tale cioè che  $2\pi c \sin \alpha \cdot d\alpha$  denota il



numero di particelle il cui asse forma con la direzione del campo un angolo compreso fra  $\alpha$  e  $\alpha + d\alpha$ , è data da

$$c = M[1 + a \cos \alpha - a' \cos \alpha \cos (2\omega t - \delta)]$$

dove

$$a = \frac{B \cos \alpha}{kT} \quad ; \quad a' = \frac{B \cos \alpha}{\sqrt{k^2 T^2 + \omega^2 r^2}} = \frac{2B \cos \alpha}{\epsilon r}$$

$$\text{tang } \delta = \frac{\omega r}{kT}$$

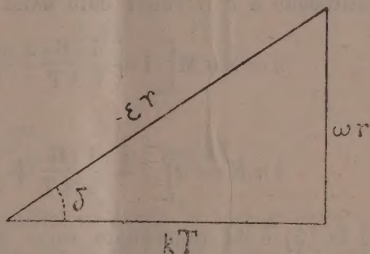


FIG. 2.

e perciò

$$(2) \quad c = M \left[ 1 + \frac{B}{kT} \cos^2 \alpha - \frac{2B \cos^2 \alpha}{\epsilon r} \cos (2\omega t - \delta) \right].$$

Per calcolare la polarizzazione si osservi che ogni particella ha come momento elettrico proiettato sull'asse del campo,

$$\mu = (\alpha_1 \cos^2 \alpha + \alpha_2 \sin^2 \alpha) h$$

e perciò il momento per unità di volume sarà

$$P = \int_0^\pi 2\pi c \sin \alpha \mu h d\alpha.$$

Sostituendo ed effettuando i calcoli si ha

$$P = 2\pi Mh \int_0^\pi (\alpha_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \alpha_2 \sin^3 \alpha) d\alpha + \\ + 2\pi Mh \left( \frac{1}{kT} - \frac{\cos (2\omega t - \delta)}{\epsilon r} \right) \int_0^\pi (\alpha_1 \sin \alpha \cos^4 \alpha + \alpha_2 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha) d\alpha.$$

Gli integrali definiti sono tutti calcolabili; si ottiene così

$$(3) \quad P = 4\pi Mh \left[ \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} \right] + \\ + \frac{4}{15} \pi Mh \left[ \frac{1}{kT} - \frac{\cos (2\omega t - \delta)}{\epsilon r} \right] (3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Per calcolare M si osservi che

$$\frac{B}{kT} = \frac{1}{2} \frac{H^2}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

corrisponde alla grandezza che Langevin indica con la lettera  $\mu$ , e che è piccolissima rispetto all'unità; a maggior ragione è piccolissima  $\frac{B}{\epsilon r}$ .

Ora si ha per il numero totale  $n$  di particelle

$$2\pi \int_0^\pi c \sin \alpha \, d\alpha = n.$$

Sostituendo a  $c$  il valore dato dalla (2), si ha

$$n = 4\pi M \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{B}{kT} - \frac{1}{3} \frac{B}{\epsilon r} \cos(2\omega t - \delta) \right]$$

cioè

$$4\pi M = n \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{B}{kT} + \frac{1}{3} \frac{B}{\epsilon r} \cos(2\omega t - \delta) \right]$$

e perciò la (2) è da considerare come una soluzione approssimata se nei calcoli di  $\frac{\partial c}{\partial \alpha}$  si suppone, come abbiamo fatto,  $M$  costante.

Sostituendo nella espressione (3) di  $P$  si ottiene, effettuati i calcoli,

$$\frac{P}{nH} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} + \frac{4}{45} \frac{B}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{4}{45} \frac{B}{\epsilon r} \cos(2\omega t - \delta) (\alpha_1 - \alpha_2)$$

e poichè

$$h = H \sin \omega t$$

osservando che

$$\sin \omega t \cos(2\omega t - \delta) = -\frac{1}{2} \sin(\omega t - \delta) + \frac{1}{2} \sin(3\omega t - \delta)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{P}{nH} = & \left[ \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} + \frac{4}{45} \frac{B}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \sin \omega t + \\ & + \frac{2}{45} \frac{B}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\omega t - \delta) - \frac{2}{45} \frac{B}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(3\omega t - \delta). \end{aligned}$$

Cioè la polarizzazione risulta di tre parti: una prima, la maggiore, che varia in fase col campo, una seconda che varia con un ritardo di fase  $\delta$ , e una terza che varia con frequenza tripla.

Isoliamo la seconda parte  $P_2$  che varia come  $\sin(\omega t - \delta)$ :

$$P_2 = \frac{2}{45} n H \frac{B}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\omega t - \delta)$$

e per la (1)

$$(4) \quad P_2 = \frac{1}{45} n \frac{H^3}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sin(\omega t - \delta).$$



Se insieme col campo  $H \sin \omega t$  nel senso  $x$ , se ne fa agire uno  $H \cos \omega t$  nel senso  $y$ , così da produrre un campo rotante, la sostanza assumerà una polarizzazione rotante con la stessa velocità e con un ritardo angolare  $\delta$  sul campo; donde una coppia per unità di volume data da

$$D = H P, \text{ mass. } \sin \delta = \frac{1}{45} n \frac{H^4}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sin \delta.$$

E poichè

$$\cos \delta = \frac{2 k T}{\epsilon r}$$

sarà

$$(5) \quad D = \frac{1}{180} n \frac{H^4}{k T} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sin 2 \delta.$$

Perciò dal punto di vista qualitativo anche la ipotesi della polarizzazione creata dal campo, così come quella del dipolo molecolare preesistente, giustifica le azioni di trascinamento accertate con l'esperienza.

Ma se si passa ai valori numerici le conseguenze sono molto diverse.

La grandezza  $H$  della formola rappresenta il campo *effettivo* cui è sottoposta la particella, e che risulta dal campo esterno  $H_0$  e dalla polarizzazione in virtù della relazione di Lorentz

$$H = H_0 + \frac{4\pi}{3} P$$

e poichè la parte principale della polarizzazione è data da

$$P = n H \frac{\alpha_1 + 2 \alpha_2}{3}$$

si avrà

$$H = \frac{H_0}{1 - n \frac{4\pi}{9} (\alpha_1 + 2 \alpha_2)}.$$

Ma <sup>(1)</sup>

$$\frac{4\pi n}{9} (\alpha_1 + 2 \alpha_2) = \frac{K - 1}{K + 2}$$

dove  $K$  è la costante dielettrica; quindi sostituendo il valore di  $H$  nella (5) si otterrà

$$D = \frac{1}{180} n \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{k T} \frac{(K + 2)^4}{81} H_0^4 \sin 2 \delta.$$

Ma si ha <sup>(1)</sup>

$$\alpha_1 - \alpha_2 < \alpha_1 + 2 \alpha_2 = \frac{9 (K - 1)}{4\pi n (K + 2)}$$

<sup>(1)</sup> Langevin, l. c.

quindi

$$D < \frac{1}{180} \frac{(K-1)^2 (K+2)^2}{kT \cdot 16 \pi^2 n} H_0^4 \sin 2\delta.$$

Si osservi che nonostante l'alta frequenza usata dal Lertes nelle sue esperienze, l'angolo  $\delta$  è sempre assai piccolo. Si ha infatti, detto  $a$  il raggio della molecola ed  $\eta$  il coefficiente di attrito del liquido,

$$\tan \delta = \frac{\omega r}{kT} = \frac{\omega \cdot 8\pi a^3 \cdot \eta}{kT} = \frac{\omega}{kT} \cdot 6\eta v$$

dove  $v$  è il volume molecolare. Ponendo:

$$kT = 4,2 \times 10^{-14} \quad ; \quad \omega = 4,5 \times 10^8 \quad ; \quad \eta = 0,01 \quad ; \quad v = \sim 4 \cdot 10^{-24}$$

si riconosce che  $\tan \delta$  è dell'ordine di 3 millesimi.

Si può quindi porre

$$\sin 2\delta = 2 \sin \delta = 2 \frac{\omega r}{kT} = \frac{12 \eta v \omega}{kT}$$

e perciò

$$D < \frac{1}{180} \frac{(K-1)^2 (K+2)^2}{16 \pi^2 \cdot n} H_0^4 \cdot \frac{12 \eta v \omega}{(kT)^2}.$$

Ora a parte che secondo le esperienze  $D$  risulta proporzionale a  $H_0^2$  e non a  $H_0^4$ , si ottiene che per il caso più favorevole dell'acqua, cioè per  $K = 80$ ,  $n = 3 \cdot 10^{21}$ , e per un campo  $H_0 = 1$ , cioè 300 volt per centimetro, il calcolo dà

$$D < 4 \cdot 10^{-4}.$$

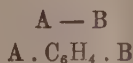
Invece il Lertes ha trovato sperimentalmente coppie di molto più elevate (dell'ordine di  $10^{-1}$  dine — cm.) anche per i liquidi per i quali la formola darebbe coppie un milione di volte più piccole che per il caso dell'acqua, per il minore valore della costante dielettrica  $k$ .

Mi sembra pertanto di poter concludere che solo la ipotesi dell'orientamento di molecole già dotate di un momento elettrico permanente sia capace di render conto, oltre che delle varie proprietà dei dielettrici, anche dell'effetto Born, cioè del trascinamento dei liquidi isolanti in un campo elettrico rotante.



**Chimica.** — *Azione dell'idrossilammina e della biossiammonica sopra alcuni nitrosoderivati* <sup>(1)</sup>. Nota del Socio A. ANGELI e di ANTONIO PIERONI.

In base a quanto uno di noi ha posto in rilievo in questi ultimi anni sopra le analogie di comportamento che intercedono fra due gruppi direttamente uniti fra di loro ovvero situati nelle posizioni orto oppure para di un anello aromatico:



era da aspettarsi che anche i composti aromatici della forma:



in alcune reazioni avessero manifestato un comportamento simile a quello delle idrazine e rispettivamente a quello dei diazoidrati.

Era noto da molto tempo <sup>(2)</sup> che le ammine della prima forma, per azione dell'acido nitroso, invece di dare i corrispondenti sali di diazonio, come p. es.:



forniscono prodotti probabilmente della forma:



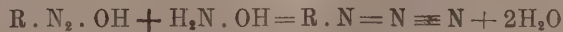
che si possono anche considerare come derivati del diazoimminochinone:



E siccome d'altra parte gli idrati di diazonio:



per azione dell'idrossilammina, danno con tutta facilità le corrispondenti azidi:



per analogia era anche da aspettarsi che i nitrosoderivati prima accennati, per azione dello stesso reattivo avessero fornito il diazoimminochinone ovvero qualche derivato molto semplice del medesimo.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

<sup>(2)</sup> Ikuta, *Annalen*, 243, 280.

L'esperienza ha subito confermata l'esattezza delle nostre previsioni.

La p-nitrosodifenilammina venne sciolta in soda diluita ed alla soluzione si aggiunge eccesso di cloridrato di idrossilammina, avvertendo che il liquido rimanga sempre alcalino. Dalla soluzione rosso-bruna e perfettamente limpida si nota un lieve sviluppo gassoso; nel domani dal liquido diventato giallognolo, si è separato un abbondante prodotto costituito da laminette splendenti colorate in giallo-chiaro.

Per la purificazione si scioglie a freddo il composto secco nella ligroina ovvero nel benzolo, se occorre si filtra, e si lascia evaporare il solvente in capsula, sempre a freddo ed al buio. Si ottengono così grandi cristalli, lunghi talora qualche centimetro, colorati lievemente in bruno. Si può anche purificare da alcool tiepido in cui è molto solubile.

Fonde a 71° e poco sopra si decompone con forte sviluppo di gas.

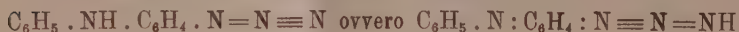
All'analisi si ebbero numeri che conducono alla formola:



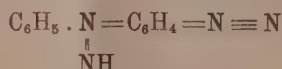
Ridotto con stagno ed acido cloridrico, il composto fornisce l'ammina:



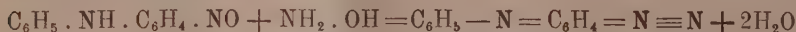
È quindi probabile che possieda la struttura:



essendo poco verosimile una forma come questa:



Ciò conduce necessariamente a supporre che in una prima fase si sia formato il diazocomposto:



il quale ha successivamente reagito con l'idrossilammina in eccesso secondo l'eguaglianza molto semplice:



Anche il nitrosoderivato:



si comporta nello stesso modo per dare un bel prodotto cristallino che fonde a 52° e che del pari, subito dopo, si decompone con sviluppo di gas.

Queste sostanze presentano grande interesse anche per la loro straordinaria sensibilità alla luce, la quale fa ricordare quella di alcuni sali d'argento.



Bagnando una carta con soluzione benzolica diluita del derivato fenilico ed esponendola ai raggi luminosi essa si colora tosto in violaceo e poi in nero intenso; il derivato metilico invece diventa prima rosso e successivamente violetto. Per tale ragione noi proponiamo di chiamare queste rimarchevoli sostanze col nome di *fotoazidi*.

Anche la biossiammoniaca (da acido benzosolfoidrossammico ed alcali) reagisce con tutta facilità sopra la soluzione alcalina di p-nitrosodifenilamina; in questo caso però si ottiene un prodotto di natura acida che si presenta in cristalli intensamente colorati in giallo che fondono a 74°.

Al pari delle precedenti, anche questa sostanza viene alterata in tutta facilità dal calore e dalla luce.

Pubblichiamo con tutto riserbo i risultati di queste ricerche preliminari allo scopo di poter proseguire indisturbati lo studio delle interessanti reazioni e ringraziamo il laureando sig. Giuseppe Greco per l'aiuto che ci ha prestato nell'esecuzione delle esperienze.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Alcune proprietà dei gruppi transitivi di sostituzioni sopra lettere.* Nota di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Il problema di costruire tutt'i gruppi possibili di sostituzioni sopra lettere si può ridurre a costruire i soli gruppi transitivi, perchè ogni gruppo intransitivo si può sempre ottenere, partendo da un certo numero di gruppi transitivi <sup>(1)</sup>. Qui ci proponiamo di costruire tutt'i possibili gruppi transitivi di un dato tipo, cioè oloedricamente isomorfi a un dato gruppo.

Osserviamo che se  $G$  è un gruppo e  $\Gamma$  un suo sottogruppo qualunque, nel gruppo complementare  $G/\Gamma$  abbiamo un gruppo transitivo di sostituzioni. Infatti, formato il quadro di  $G$  rispetto a  $\Gamma$ :

$$G = (\Gamma; \Gamma g_2; \dots; \Gamma g_q),$$

quella sostituzione di  $G/\Gamma$  che corrisponde a  $g_i$  porta  $g_1 = 1$  in  $g_i$ ; dunque esiste sempre qualche sostituzione di  $G/\Gamma$  che porti la lettera  $g_1$  in un'altra lettera  $g_i$ , e perciò  $G/\Gamma$  è transitivo.

*Inversamente, ogni gruppo transitivo è identico a un gruppo complementare.* Se  $G$  è un gruppo transitivo sopra le  $n$  lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $\Gamma_1$  è quel suo sottogruppo che lascia ferma una data lettera  $a_1$ , formato il quadro di  $G$  rispetto a  $\Gamma_1$ :

$$(1) \quad G = (\Gamma_1 g_1; \Gamma_1 g_2; \dots; \Gamma_1 g_n) \text{ (ove } g_1 = 1),$$

<sup>(1)</sup> Vedi P. Mazzoni, *Ricerche sulla teoria dei gruppi d'ordine finito*, §§ 24 e 25.

dimostriamo che i due gruppi  $G$  e  $G/\Gamma$  coincidono, salvo il nome delle lettere su cui essi agiscono (come diremo, sono *identici*): precisamente che le sostituzioni di  $G/\Gamma$  si ottengono dalle corrispondenti di  $G$ , cambiandovi le lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Facciamo vedere che se  $g$  è una sostituzione di  $G$ , e  $h$  la corrispondente di  $G/\Gamma$ , se  $g$  porta  $a_i$  in  $a_k$ , la  $h$  porterà  $g_i$  in  $g_k$ .

Infatti nella riga  $i^{\text{ma}}$  di (1) si trovano tutte (e sole) sostituzioni di  $G$  che portano  $a_i$  in una stessa lettera (ad es.  $a_i$ ), per  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ora la  $g_i g$  porterà  $a_i$  in  $a_k$ , onde sarà  $g_i g = \gamma g_k$ , essendo  $\gamma$  una certa sostituzione di  $\Gamma$ ; dunque la  $h$  porta  $g_i$  in  $g_k$ . C. d. d. <sup>(1)</sup>.

*I gruppi complementari sono dunque i più generali gruppi transitivi.*

In particolare si ha il gruppo  $G/1$ , che è transitivo e di ordine uguale al numero delle lettere su cui esso agisce (come diremo, è un *gruppo regolare*); esso è oloedricamente isomorfo a  $G$ , e si suole chiamarlo il *potenziale* di  $G$ . Per i gruppi (transitivi) regolari valgono alcuni importanti teoremi di Jordan, che estenderemo ai gruppi transitivi qualunque.

Se  $G$  è *transitivo e abeliano*,  $\Gamma_1$  si riduce a 1, e  $G$  è *regolare*. Se  $G$  è inoltre *ciclico*, esso è generato dalle potenze di una sostituzione circolare.

2. I gruppi  $G$  transitivi di sostituzioni, di un dato tipo, cioè oloedricamente isomorfi a un dato gruppo  $H$ , sono (prescindendo dal nome delle lettere) tutti quelli della forma  $H/K$ , essendo  $K$  un sottogruppo di  $H$  tale che il massimo sottogruppo comune a  $K$  e ai suoi affini in  $G$  sia l'identità. Tra essi ne figura sempre uno regolare, il quale si ottiene prendendo per  $K$  l'identità.

Infatti  $G$  coinciderà con  $G/\Gamma_1$ . Ora nell'isomorfismo oloedrico supposto esistente tra  $G$  e  $H$ , al sottogruppo  $\Gamma_1$  di  $G$  corrisponderà un sottogruppo  $K$  di  $H$  (tale che il massimo sottogruppo comune a  $K$  e ai suoi affini in  $H$  sarà pure 1). Segue che  $G/\Gamma_1$  e  $H/K$  sono identici (§ 5 mio citato lavoro); e dunque pure  $G$  è identico a  $\frac{H}{K}$ . C. d. d.

Il problema proposto è risolto. In modo analogo si dimostra che:

*In generale, se  $G$  è transitivo e isomorfo a  $H$  (oloedricamente o meriedricamente), vi è sempre un sottogruppo  $K$  di  $H$  tale che  $G$  sia identico a  $H/K$ .*

3. Se  $G$  e  $G'$  sono due gruppi transitivi dello stesso tipo, se  $\Gamma$  è il sottogruppo di  $G$  che lascia ferma una sua lettera, e  $\Gamma'$  quello di  $G'$  che ne lascia ferma una lettera, se vi è una relazione d'isomorfismo tra  $G$  e  $G'$ , in cui a ogni sostituzione di  $\Gamma$  ne corrisponda una di  $\Gamma'$ , e viceversa, allora  $G$  e  $G'$  sono identici: cioè l'uno si ottiene dall'altro, trasformandolo con una certa sostituzione.

(1) Si vede subito che il massimo sottogruppo comune a  $\Gamma$  e ai suoi affini in  $G$  è 1; che il trasformato  $\Gamma_i = g_i^{-1} \Gamma g_i$  è quel sottogruppo di  $G$  che lascia ferma  $a_i$ ; e che se  $G$  è più volte transitivo, i gruppi affini  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  sono tutti distinti.



Infatti  $G$  è identico a  $G/\Gamma$ , come  $G'$  a  $G'/\Gamma'$ ; ma  $G/\Gamma$  e  $G'/\Gamma'$  sono pure identici (§ 5 c. s.), e dunque, ecc. C. d. d.

Se  $G$  e  $G'$  sono regolari, allora si ritrova il teorema di Jordan: Due gruppi regolari ploedricamente isomorfi sono identici.

Torniamo a dimostrare in altro modo il teorema generale, per dedurne alcune conseguenze. Siano  $a_1, a_2, \dots, a_n$  le lettere su cui agisce  $G$ ; il sottogruppo  $\Gamma_1$  lascia ferma  $a_1$ , ma può lasciar ferme certe  $r$  lettere  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Formato il quadro (1), poniamo che alla sostituzione  $g_i$  di  $G$  corrisponda  $g'_i$  di  $G'$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); si avrà l'altro quadro (§ 5 c. s.):

$$G' = (\Gamma' g'_1; \Gamma' g'_2; \dots; \Gamma' g'_n).$$

Diciamo  $b_1$  una delle lettere di  $G'$  che sono lasciate ferme da  $\Gamma'$ , e diciamo  $b_i$  la lettera in cui  $g'_i$  porta  $b_1$ : dimostriamo che le sostituzioni di  $G'$  si ottengono dalle corrispondenti di  $G$ , cambiando le lettere  $a_1, \dots, a_n$  ordinatamente in  $b_1, \dots, b_n$ ; ossia che si ha:

$$G' = \begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix}^{-1} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix}.$$

Bisogna far vedere che se  $g$  porta  $a_i$  in  $a_k$ , la corrispondente  $g'$  porterà  $b_i$  in  $b_k$ . Ora  $g_i g$  porta  $a_1$  in  $a_k$ , e sarà  $g_i g = \gamma g_k$ ; segue, prendendo le sostituzioni corrispondenti, che  $g'_i g' = \gamma' g'_k$ , ossia che  $g' = g'^{-1} \gamma' g'_k$ , la quale dunque porta  $b_i$  in  $b_k$ . C. d. d.

Dunque vi è una sostituzione  $S$  che trasforma le singole sostituzioni di  $G$  in quelle rispettivamente corrispondenti di  $G'$ . Il numero di tali sostituzioni  $S$  è uguale al numero  $r$  delle lettere lasciate ferme da  $\Gamma$ , o da  $\Gamma'$  (perchè  $b_1$  era una qualunque di queste ultime).

4. In particolare, se  $G'$  coincide con  $G$ , e si fa corrispondere a ogni sostituzione, sè stessa, esisteranno certe  $r$  sostituzioni sopra  $a_1, a_2, \dots, a_n$  che trasformeranno ciascuna sostituzione di  $S$  in sè stessa. Dunque:

*Se  $G$  è un gruppo transitivo sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $\Gamma$  è quel suo sottogruppo che ne lascia ferma una lettera, se  $\Gamma \Gamma_1$  lascia ferme  $r$  lettere, allora esistono precisamente  $r$  sostituzioni distinte sopra  $a_1, \dots, a_n$  che siano permutabili con tutte quelle di  $G$ : esse formano un gruppo  $K$ , e sono della forma*

$$\begin{pmatrix} a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix},$$

*essendo  $a_{i_1}$  una delle suddette  $r$  lettere, e  $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$  essendo quelle in cui  $a_{i_1}$  è portata rispettivamente dalle moltiplicatrici  $g_1, \dots, g_n$  del quadro (1).*

Si può dimostrare che  $K$  è oloedricamente isomorfo a  $1/\Gamma$ , essendo  $I$  il massimo sottogruppo di  $G$  che contenga  $\Gamma$  come sottogruppo invariante, e che  $r$  è un divisore di  $n$ ; infine che le lettere lasciate ferme da  $\Gamma_1$  sono tutte quelle in cui le sostituzioni di  $I$  portano una di esse  $a_1$ .

In particolare, se  $G$  è regolare, allora esistono  $n$  sostituzioni  $S$ , permutabili con tutte quelle di  $G$ ; esse formano il cosiddetto gruppo *congiunto* di  $G$  (altro teorema di Jordan). Abbiamo così estesi ai gruppi transitivi qualsiasi i due notevoli teoremi di Jordan sui gruppi regolari.

Si ricava infine: Se  $G$  è abeliano e transitivo, le sole sostituzioni sopra le sue lettere che sieno permutabili con tutte quelle di  $G$ , sono le sostituzioni di  $G$  stesso (poichè  $G$  sarà regolare e coinciderà col proprio congiunto).

**Matematica.** — *Sopra certe equazioni integrali di Volterra, risolubili con procedimenti finiti.* Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. Tedone ha dimostrato che l'equazione integrale

$$(1) \quad \int_0^{\xi} \varphi(t) K(\xi - t) dt = \Phi(\xi),$$

(dove, per semplicità, è supposto  $\Phi(0) = 0$ ), si risolve con procedimento finito se  $K(z)$  coincide con la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero,  $J_0(z)$  <sup>(1)</sup>; e da ciò ha dedotto che la (1) si presta ad una risoluzione simile in molti altri casi, purchè il nucleo si possa esprimere in modo opportuno per mezzo della stessa funzione  $J_0(z)$  <sup>(2)</sup>.

In questa Nota ci proponiamo di mostrare che la (1) si risolve con procedimento finito, se  $K(z)$  appartiene ad una classe di funzioni, tra le quali è compresa la citata funzione di Bessel.

2. Supponiamo, dapprima,  $K(z) = \frac{e^{cz}}{z^\alpha}$ , con  $c$  ed  $\alpha$  costanti, e  $0 < \alpha < 1$ ; ed osserviamo che

$$\int_t^v \frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}} \cdot \frac{e^{c(\xi-t)}}{(\xi-t)^\alpha} d\xi = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} e^{c(v-t)} \quad (3).$$

Moltiplicando, quindi, la (1) per

$$\frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}} d\xi,$$

ed integrando, tra i limiti zero e  $v$ , otteniamo, coll'impiego della formula d'inversione di integrali di Dirichlet,

$$\int_0^v \varphi(t) e^{c(v-t)} dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^v \Phi(\xi) \frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}} d\xi;$$

(1) Rend. Lincei, seduta 31 maggio 1913.

(2) Ibid., sedute 5 aprile 1914, e 21 marzo 1915.

(3) Basti ricordare che è

$$\int_t^v \frac{d\xi}{(v-\xi)^{1-\alpha}(\xi-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi};$$

da cui, con una derivazione, risulta

$$\varphi(v) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \pi}{\pi} \left[ \frac{d}{dv} - c \right] \int_0^v \Phi(\xi) \frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}} d\xi.$$

3. Sia ora

$$(2) \quad K(z) = \int_0^z \frac{e^{cu}}{u^\alpha} \frac{e^{c_1(z-u)}}{(z-u)^{\alpha_1}} du,$$

con  $c$  e  $c_1$ ,  $\alpha$  e  $\alpha_1$  costanti, queste ultime comprese tra zero ed 1.

Per quanto precede, possiamo esprimere facilmente  $\frac{e^{cz}}{z^\alpha}$  per mezzo di  $K(z)$ ; troviamo, così,

$$\frac{e^{cz}}{z^\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \pi}{\pi} \left[ \frac{d}{dz} - c_1 \right] \int_0^z K(u) \frac{e^{c_1(z-u)}}{(z-u)^{1-\alpha_1}} du;$$

ovvero, posto  $z = v - t$ ,  $u = \xi - t$ ,

$$(3) \quad \frac{e^{c(v-t)}}{(v-t)^\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \pi}{\pi} \left[ \frac{d}{dv} - c_1 \right] \int_t^v K(\xi - t) \frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}} d\xi.$$

Dalla (1) poi, operando come nel caso precedente, segue

$$\int_0^v \varphi(t) dt \int_t^v K(\xi - t) \frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}} d\xi = \int_0^v \Phi(\xi) \frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}} d\xi;$$

perciò, con una derivazione, e coll'impiego della (3),

$$\int_0^v \varphi(t) \frac{e^{c(v-t)}}{(v-t)^\alpha} dt = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \pi}{\pi} \left[ \frac{d}{dv} - c_1 \right] \int_0^v \Phi(\xi) \frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}} d\xi.$$

Siamo così ricondotti ad una equazione integrale, nella quale il nucleo è  $\frac{e^{cz}}{z^\alpha}$ .

Se si attribuiscono convenienti valori alle costanti  $c$ ,  $c_1$ ,  $\alpha$  e  $\alpha_1$ , la funzione (2) si riduce, a meno di un fattore costante, alla funzione  $J_c$  di Bessel. È infatti

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{e^{-i(x-2u)}}{\sqrt{u}\sqrt{z-u}} du \quad (1).$$

4. È chiaro che un procedimento analogo si potrà seguire, per risolvere la (1), quando si supponga

$$K(z) = \int_0^z \frac{e^{c_2(x-u_1)}}{(z-u_1)^{\alpha_2}} du_1 \int_0^{u_1} \frac{e^{cu}}{u^\alpha} \frac{e^{c_1(u_1-u)}}{(u_1-u)^{\alpha_1}} du,$$

o, più in generale,

$$K(z) = \int_0^z \frac{e^{c_n(x-u_{n-1})}}{(z-u_{n-1})^{\alpha_n}} du_{n-1} \int_0^{u_{n-1}} \frac{e^{c_{n-1}(u_{n-1}-u_{n-2})}}{(u_{n-1}-u_{n-2})^{\alpha_{n-1}}} du_{n-2} \dots$$

$$\dots \int_0^{u_1} \frac{e^{cu}}{u^\alpha} \frac{e^{c_1(u_1-u)}}{(u_1-u)^{\alpha_1}} du,$$

dove le costanti  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_n$  sieno comprese tra zero ed 1.

(1) Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik*, 1<sup>er</sup> Bd., ediz. 1919, § 75, formula (3).



**Astronomia.** — *Introduzione al nuovo catalogo stellare del R. Osservatorio astronomico del Campidoglio.* Nota di GABRIELLA CONTI, presentata dal Corrisp. G. ARMELLINI.

L'Osservatorio del Campidoglio riprende quest'anno il suo lavoro di catalogo la cui pubblicazione fu iniziata nel 1880 dal prof. L. Respighi (con le declinazioni medie di 1463 stelle comprese tra i paralleli  $20^{\circ}$  e  $60^{\circ}$  N), e continuata dallo stesso prof. Respighi e dai professori Di Legge e Giacomelli.

Le stelle contenute nei cataloghi sino ad ora pubblicati sono tutte, salvo rare eccezioni, comprese nell'emisfero N. Il nuovo catalogo si estenderà invece anche all'emisfero S, abbracciando la zona da  $0^{\circ}$  a  $20^{\circ}$ .

In questo catalogo tanto stimato per l'esattezza dei suoi dati, e tenuto in tanta considerazione da insigni astronomi come lo Schiaparelli, l'Auwers, il Celoria, il Lorenzoni ecc., è in particolar modo opportuno comprendere questa zona, nella quale, data la prossimità dell'equatore, è necessario che le osservazioni siano eseguite con tutti i mezzi più atti a garentirne la massima precisione. Infatti l'Osservatorio del Campidoglio possiede un circolo verticale di Ertel, che per la perfetta costruzione è uno dei migliori d'Italia. Quest'ottimo strumento ha ancora il vantaggio di poggiare su pilastri solidissimi, in un edificio le cui fondamenta sono piantate su quelle della costruzione romana del *Tabularium*, che garentisce alle fondamenta stesse una resistenza a tutta prova. La robustezza delle basi del Campidoglio e la sua posizione presso la zona archeologica, permettono di non risentire dei rumori e delle perturbazioni proprie del centro di una città. Inoltre l'altezza delle torri capitoline fa sì che le osservazioni non siano ostacolate dalla nebbia che si alza dal fiume.

Naturalmente, perchè il nuovo catalogo sia all'altezza di quelli già pubblicati dai professori Respighi, Di Legge e Giacomelli, è necessario che a questo insieme di condizioni favorevoli all'esattezza delle osservazioni, si unisca la massima scrupolosità nell'eliminare tutti i possibili errori personali, strumentali, della rifrazione di camera, ecc.

Avendo avuto dal direttore prof. Armellini l'incarico di osservare in quest'anno un primo gruppo di stelle, compreso tra  $0^{\circ}$  e  $-5^{\circ}$ , ho voluto dunque rideterminare tutti i diversi errori probabili, sia nella collimazione, per mezzo dei fili del micrometro, sia nella lettura del cerchio graduato ecc., secondo le norme consigliate dal Peters, nella sua classica Memoria *Recherches sur les parallaxes des étoiles fixes* <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Mémoire de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, 6<sup>e</sup> série, vol. V, a. 1848.

Nella presente Nota, parlerò dello studio da me fatto degli errori di collimazione, riserbandomi di esporre in Note successive lo studio degli errori accidentali e periodici del cerchio graduato e lo studio dalla correzione dovuta alla rifrazione di camera.

Credo inutile ripetere la descrizione dell'istrumento, che è lo stesso che servi per tutti gli altri cataloghi del Campidoglio, e che è stato già minutamente descritto dai professori Calandrelli e Respighi rispettivamente nelle Memorie dell'Osservatorio stesso e nell'introduzione al Catalogo.

Ricorderò soltanto che l'apparato micrometrico è composto di un telaio portante 17 fili verticali e 2 fili orizzontali. Dei fili verticali, 15 sono disposti in gruppi di 3 fili ciascuno, ed i rimanenti sono disposti isolatamente, l'uno prima del primo gruppo e l'altro dopo il quinto. I due fili orizzontali, a breve distanza l'uno dall'altro, attraversano a metà i fili verticali. Sul primo telaio ne scorre un secondo, portante un unico filo verticale, che, per mezzo di una vite, può essere trasportato attraverso tutto il campo, parallelamente agli altri 17. L'apparecchio è fornito di un sistema di illuminazione, che permette sia di illuminare i soli fili, lasciando il campo oscuro, sia di illuminare il campo, lasciando oscuri i fili. Nelle mie determinazioni, non dovendo collimare stelle piccolissime, ho eseguito tutte le collimazioni con i fili oscuri in campo illuminato.

Ho esaminato in primo luogo le distanze tra i fili micrometrici, osservando, al loro passaggio in meridiano, circa 60 stelle equatoriali, scelte sul *Berliner Astronomisches Jahrbuch*.

Per queste misure mi sono servita solo dei fili fissi del micrometro. Le stelle attraversavano il campo micrometrico, restando sempre comprese tra i due fili orizzontali. L'istante del passaggio delle stelle attraverso ogni filo verticale, per comando trasmesso da apposito tasto, veniva da una punta segnato sul nastro di un cronografo, sul quale un'altra punta segnava i secondi battuti da un pendolo Riefler.

La lettura del nastro del micrometro è stata da me fatta due volte, per poter raggiungere una maggiore esattezza nella valutazione dei decimi. La differenza tra una lettura e la successiva mi serviva per trovare la distanza tra i fili micrometrici. Nelle tabelle seguenti figurano appunto tali differenze. Esse sono divise in gruppi ciascuno dei quali rappresenta una sera di osservazioni. La prima colonna porta semplicemente i numeri d'ordine delle stelle osservate; nelle colonne seguenti sono disposte le suddette differenze nel loro ordine di successione. Ciascuna colonna porta in basso la media aritmetica delle singole misure e l'errore probabile.

|   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 13.40       | 1.30        | 1.80        | —           | —           | 4.35        | 9.05        | 4.35        | 4.35        | 9.00        | 4.65        | 4.70        | 8.45        | 1.60        | 4.30        | 13.40       |
| 2 | 13.40       | 4.70        | 4.50        | 8.80        | 4.70        | 1.30        | —           | —           | 1.15        | 9.20        | 4.60        | 4.60        | 8.75        | 1.55        | 4.75        | 13.65       |
| 3 | 13.40       | 4.45        | 1.45        | 8.60        | 4.80        | 1.40        | 8.80        | 4.30        | 4.60        | 9.10        | 4.45        | 4.55        | 8.70        | 4.65        | 4.45        | 13.20       |
| 4 | 13.50       | 4.40        | 1.45        | 8.75        | 1.60        | 4.30        | 9.20        | 4.35        | 4.45        | 9.00        | 4.70        | 4.30        | 8.50        | 4.65        | 4.55        | 13.20       |
| 5 | 13.45       | 4.55        | 1.70        | 8.75        | 4.50        | 1.20        | 9.05        | 4.30        | 1.15        | 9.00        | 4.45        | 4.60        | 8.45        | 4.50        | 4.40        | —           |
| 6 | 13.30       | 4.60        | 4.60        | 8.60        | 4.65        | 1.15        | 9.20        | 4.10        | 4.70        | 9.10        | 4.60        | 4.45        | 8.40        | 4.85        | 4.45        | 13.15       |
| 7 | 13.20       | 4.30        | 4.70        | 8.60        | 4.60        | 4.40        | 8.80        | 4.70        | 4.30        | 9.10        | 4.60        | 4.25        | 8.55        | 4.45        | 4.65        | 13.40       |
|   | 13.38       | 4.47        | 4.60        | 8.70        | 4.64        | 4.30        | 9.02        | 4.42        | 4.13        | 9.07        | 4.58        | 4.49        | 8.54        | 4.61        | 4.51        | 13.23       |
|   | $\pm 0.067$ | $\pm 0.101$ | $\pm 0.094$ | $\pm 0.061$ | $\pm 0.067$ | $\pm 0.067$ | $\pm 0.121$ | $\pm 0.141$ | $\pm 0.121$ | $\pm 0.047$ | $\pm 0.061$ | $\pm 0.115$ | $\pm 0.081$ | $\pm 0.088$ | $\pm 0.101$ | $\pm 0.094$ |
| 1 | —           | 4.60        | 4.25        | 8.70        | 4.55        | 4.15        | 8.95        | 4.60        | 4.35        | 9.85        | 4.70        | 4.55        | 8.45        | 4.70        | 4.50        | 13.30       |
| 2 | 13.70       | 4.40        | 4.80        | 8.70        | 4.30        | 4.25        | 8.95        | 4.55        | 4.35        | 9.10        | 4.50        | 4.55        | 8.45        | 4.55        | 4.55        | —           |
| 3 | 13.20       | 4.80        | 4.40        | 8.50        | 4.60        | 4.40        | 9.00        | —           | —           | 8.95        | 4.40        | 4.70        | 8.30        | 4.90        | 4.40        | 13.30       |
| 4 | 13.55       | 4.35        | 4.70        | 8.50        | 4.70        | 4.00        | 9.10        | 4.70        | 4.10        | —           | —           | 4.60        | 8.45        | 4.50        | 4.90        | —           |
| 5 | 13.70       | 4.30        | 4.45        | 8.75        | 4.55        | 4.15        | 9.00        | 4.70        | 4.30        | 8.90        | 4.50        | 4.60        | 8.65        | 4.55        | 4.60        | 13.20       |
| 6 | 13.40       | 4.55        | 4.60        | 8.60        | 4.60        | 4.20        | 9.00        | 4.70        | 4.20        | 9.15        | 4.60        | 4.40        | 8.60        | 4.60        | 4.80        | 13.10       |
| 7 | 13.55       | 4.40        | 4.55        | 8.45        | 4.70        | 4.30        | 9.05        | 4.40        | 4.30        | 9.10        | 4.40        | 4.65        | 8.55        | 4.60        | 4.70        | 13.30       |
|   | 13.51       | 4.49        | 4.54        | 8.60        | 4.57        | 4.21        | 9.01        | 4.61        | 4.27        | 9.01        | 4.51        | 4.58        | 8.49        | 4.63        | 4.68        | 13.24       |
|   | $\pm 0.128$ | $\pm 0.115$ | $\pm 0.128$ | $\pm 0.081$ | $\pm 0.094$ | $\pm 0.088$ | $\pm 0.034$ | $\pm 0.074$ | $\pm 0.067$ | $\pm 0.074$ | $\pm 0.074$ | $\pm 0.061$ | $\pm 0.074$ | $\pm 0.094$ | $\pm 0.128$ | $\pm 0.047$ |
| 1 | 13.15       | —           | —           | 8.95        | 4.75        | 4.20        | 9.00        | 4.45        | 4.45        | 9.00        | 4.30        | 4.70        | 8.50        | 4.65        | 4.85        | 13.20       |
| 2 | —           | 4.45        | 4.75        | 8.80        | 4.40        | 4.40        | 9.00        | 4.40        | 4.60        | 8.80        | 4.40        | 4.70        | 8.35        | 4.85        | 4.70        | 13.00       |
| 3 | 13.45       | 4.60        | 4.60        | 8.80        | —           | —           | 9.30        | 4.40        | 4.40        | 9.25        | 4.55        | 4.40        | 8.80        | 4.70        | 4.70        | 13.20       |
| 4 | 13.50       | 4.45        | 4.65        | 8.70        | 4.50        | 4.50        | 8.70        | 4.50        | 4.50        | 9.00        | 4.40        | 4.75        | 8.55        | 4.70        | 4.40        | 13.20       |
| 5 | 13.10       | 4.55        | 4.55        | 8.50        | 4.75        | 4.45        | 9.00        | 4.60        | 4.30        | 9.00        | 4.25        | 4.60        | —           | —           | 4.65        | 13.35       |
| 6 | 13.40       | 4.40        | 4.70        | 8.50        | 4.70        | 4.15        | 9.10        | 4.45        | 4.30        | 9.10        | 4.40        | 4.40        | 8.80        | 4.60        | 4.50        | 13.15       |
| 7 | 13.40       | 4.45        | 4.65        | 8.70        | 4.50        | 4.05        | 9.30        | 4.45        | 4.40        | 8.90        | 4.60        | 4.40        | —           | —           | 4.45        | 13.30       |
| 8 | 13.45       | 4.55        | 4.55        | 8.90        | —           | —           | 8.90        | 4.55        | 4.35        | 9.10        | 4.45        | 4.45        | 8.50        | 4.65        | 4.95        | 13.05       |
| 9 | 13.30       | 4.75        | —           | —           | 4.60        | 4.40        | 9.00        | 4.25        | 4.75        | 8.90        | —           | —           | 8.40        | 4.80        | 4.60        | 13.20       |
|   | 13.39       | 4.52        | 4.64        | 8.73        | 4.60        | 4.31        | 9.03        | 4.45        | 4.45        | 8.99        | 4.42        | 4.55        | 8.53        | 4.71        | 4.64        | 13.18       |
|   | $\pm 0.108$ | $\pm 0.074$ | $\pm 0.047$ | $\pm 0.115$ | $\pm 0.094$ | $\pm 0.115$ | $\pm 0.128$ | $\pm 0.061$ | $\pm 0.101$ | $\pm 0.084$ | $\pm 0.081$ | $\pm 0.101$ | $\pm 0.121$ | $\pm 0.061$ | $\pm 0.121$ | $\pm 0.074$ |



|   |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 13.50   | 4.20    | 4.80    | 8.90    | 4.30    | 4.50    | 9.00    | 4.60    | 4.10    | 9.30    | 4.30    | 4.30    | 4.30    | 8.60    | 4.50    | 4.30    | 12.30   |
| 2 | 13.60   | 4.30    | 4.60    | 8.70    | 4.55    | 4.20    | 9.05    | —       | —       | 8.95    | —       | —       | —       | 8.55    | 4.50    | 4.60    | 13.25   |
| 3 | 13.65   | 4.70    | 4.35    | 8.80    | 4.65    | 4.50    | 9.10    | 4.60    | 4.50    | 8.80    | 4.70    | 4.50    | 4.50    | 8.70    | 4.60    | 4.70    | 13.50   |
| 4 | 13.25   | 4.35    | 4.50    | 8.90    | 4.60    | 4.25    | 9.00    | 4.60    | 4.25    | 9.20    | 4.10    | 4.50    | 4.50    | 8.90    | 4.40    | 4.75    | 13.15   |
| 5 | —       | 4.60    | 4.70    | 8.70    | 4.60    | 4.00    | 9.20    | 4.50    | 4.30    | 9.10    | 4.60    | 4.50    | 4.50    | 8.60    | 4.70    | 4.40    | 13.20   |
|   | 13.50   | 4.43    | 4.59    | 8.80    | 4.54    | 4.29    | 9.07    | 4.58    | 4.25    | 9.08    | 4.42    | 4.50    | 4.54    | 8.67    | 4.54    | 4.67    | 13.20   |
|   | ± 0.121 | ± 0.135 | ± 0.115 | ± 0.067 | ± 0.094 | ± 0.142 | ± 0.054 | ± 0.034 | ± 0.108 | ± 0.142 | ± 0.171 | ± 0.090 | ± 0.074 | ± 0.034 | ± 0.074 | ± 0.128 | ± 0.142 |
| 1 | —       | 4.55    | 4.65    | 8.60    | 4.70    | 4.00    | 8.90    | —       | —       | 8.90    | 4.80    | 4.45    | —       | 8.55    | —       | —       | —       |
| 2 | 13.25   | 4.55    | 4.60    | 8.55    | —       | —       | 9.05    | 4.30    | 4.65    | 9.00    | 4.80    | 4.50    | 4.65    | 8.65    | 4.65    | 4.80    | 13.60   |
| 3 | 13.45   | —       | —       | 8.55    | 4.65    | 4.30    | 8.80    | 4.60    | 4.35    | 9.15    | 4.45    | 4.50    | 4.65    | 8.55    | 4.65    | 4.55    | 13.40   |
| 4 | —       | 4.70    | 4.60    | 8.55    | 4.85    | 4.00    | 8.90    | 4.70    | 4.40    | 9.00    | 4.60    | 4.50    | 4.40    | 8.60    | 4.40    | 4.90    | 13.00   |
| 5 | —       | —       | 4.60    | 8.50    | 4.70    | 4.20    | 9.25    | 4.65    | 4.40    | 8.65    | 4.75    | 4.40    | 4.70    | 8.70    | 4.70    | 4.55    | —       |
| 6 | 13.30   | 4.60    | 4.40    | 8.80    | 4.50    | 4.30    | 8.90    | 4.40    | 4.60    | 8.90    | 4.50    | 4.60    | 4.60    | 8.40    | 4.60    | 4.90    | 13.20   |
|   | 13.33   | 4.60    | 4.57    | 8.59    | 4.68    | 4.16    | 8.97    | 4.53    | 4.48    | 8.93    | 4.57    | 4.49    | 4.60    | 8.57    | 4.60    | 4.74    | 13.30   |
|   | ± 0.067 | ± 0.047 | ± 0.067 | ± 0.074 | ± 0.088 | ± 0.101 | ± 0.108 | ± 0.115 | ± 0.088 | ± 0.108 | ± 0.128 | ± 0.047 | ± 0.081 | ± 0.067 | ± 0.081 | ± 0.121 | ± 0.175 |
| 1 | 13.65   | 4.20    | 4.80    | 8.50    | 4.70    | 4.10    | 9.10    | 4.50    | 4.30    | 9.10    | 4.70    | 4.40    | 4.60    | 8.40    | 4.60    | 4.50    | 13.30   |
| 2 | 13.40   | 4.30    | 4.70    | 8.60    | 4.60    | 4.30    | 8.95    | 4.35    | 4.70    | 9.00    | 4.50    | 4.55    | —       | —       | —       | 4.65    | 13.05   |
| 3 | 13.55   | 4.45    | 4.50    | 8.75    | 4.55    | 4.30    | 9.05    | 4.45    | 4.50    | 8.95    | 4.45    | 4.60    | 4.75    | 8.25    | 4.75    | 4.70    | 13.20   |
| 4 | 13.30   | 4.40    | 4.70    | 8.60    | 4.60    | 4.40    | 8.85    | 4.55    | 4.55    | 8.85    | 4.70    | 4.50    | 4.75    | 8.40    | 4.75    | 4.75    | 13.20   |
| 5 | 13.70   | 4.30    | 4.70    | 8.40    | 4.70    | 4.30    | 8.95    | 4.55    | 4.40    | 9.00    | 4.60    | 4.30    | 4.60    | 8.70    | 4.60    | 4.50    | 13.20   |
| 6 | —       | 4.50    | 4.60    | 8.60    | 4.85    | 4.15    | 8.85    | 4.65    | 4.30    | 9.20    | 4.55    | 4.70    | —       | —       | —       | 4.45    | 13.10   |
|   | 13.52   | 4.36    | 4.67    | 8.58    | 4.67    | 4.26    | 8.96    | 4.51    | 4.46    | 9.02    | 4.58    | 4.51    | 4.67    | 8.44    | 4.67    | 4.59    | 13.18   |
|   | ± 0.115 | ± 0.074 | ± 0.035 | ± 0.081 | ± 0.074 | ± 0.074 | ± 0.067 | ± 0.067 | ± 0.108 | ± 0.081 | ± 0.037 | ± 0.094 | ± 0.061 | ± 0.128 | ± 0.061 | ± 0.081 | ± 0.54  |
| 1 | 13.30   | —       | —       | 8.50    | 4.55    | 4.25    | —       | —       | 4.25    | 9.05    | 4.55    | 4.25    | 4.50    | 8.80    | 4.50    | 4.70    | 13.25   |
| 2 | 13.30   | 4.55    | 4.60    | 8.55    | 4.85    | 4.45    | 9.10    | —       | —       | 9.00    | —       | —       | 4.65    | 8.55    | 4.65    | 4.85    | 13.05   |
| 3 | 13.15   | 4.45    | 4.60    | 8.90    | 4.40    | 4.40    | 8.80    | 4.70    | 4.50    | 9.00    | 4.80    | —       | 4.65    | —       | —       | —       | —       |
| 4 | —       | 4.20    | 4.80    | 8.80    | 4.40    | 4.30    | —       | —       | 4.65    | 9.25    | 4.65    | 4.45    | 4.70    | 8.70    | 4.70    | 4.75    | 13.35   |
| 5 | 13.20   | 4.30    | 4.70    | 8.75    | 4.45    | 4.40    | 8.80    | 4.70    | 4.35    | 9.05    | 4.60    | 4.30    | 4.45    | 8.50    | 4.45    | 4.65    | 13.40   |
|   | 13.24   | 4.37    | 4.67    | 8.70    | 4.53    | 4.36    | 8.90    | 4.70    | 4.44    | 9.07    | 4.52    | 4.30    | 4.59    | 8.64    | 4.59    | 4.74    | 13.26   |
|   | ± 0.047 | ± 0.108 | ± 0.061 | ± 0.115 | ± 0.101 | ± 0.054 | ± 0.115 | ± 0.090 | ± 0.115 | ± 0.067 | ± 0.108 | ± 0.074 | ± 0.074 | ± 0.094 | ± 0.074 | ± 0.061 | ± 0.101 |

**Fisica matematica.** — *Sulla massa della radiazione in uno spazio vuoto.* Nota di E. FERMI ed A. PONTREMOLI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Recentemente uno di noi <sup>(1)</sup> ebbe a dimostrare, introducendo un più esatto concetto della rigidità, come l'elettrodinamica ordinaria consenta di giungere alla determinazione della massa di riposo di un elettrone non diversa da quella attribuitagli secondo la teoria della relatività, e che, come è noto, si ottiene semplicemente dividendo per il quadrato della velocità della luce l'energia del sistema.

Abbiamo osservato che una simile differenza, tra il valore determinato secondo l'elettrodinamica ordinaria o colla relatività, si presenta nel calcolo della massa della radiazione di uno spazio vuoto <sup>(2)</sup>, e ci proponiamo di dimostrare che questo divario può eliminarsi mediante analoghe considerazioni.

Il procedimento sinora seguito per determinare colla elettrodinamica la massa della radiazione in una cavità consisteva anzitutto nel calcolare l'impulso elettromagnetico  $G_0$  per moti lenti e quasi stazionari, che risulta espresso <sup>(3)</sup>, trascurando termini in  $\frac{v^2}{c^2}$ , da

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} v,$$

dove  $W_0$  è l'energia della radiazione allo stato di quiete,  $v$  è la velocità attuale della cavità,  $c$  è la velocità della luce. Da questo si deduceva che la reazione di inerzia è

$$-\frac{dG_0}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \mathbf{F}.$$

dove  $\mathbf{F}$  è l'accelerazione; donde una massa apparente della radiazione eguale a  $\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2}$ , mentre, secondo la teoria della relatività, essa dovrebbe essere semplicemente  $\frac{W_0}{c^2}$ .

In questo procedimento è contenuta implicitamente l'asserzione che la forza esterna  $\mathbf{F}$  sia eguale alla derivata dell'impulso elettromagnetico ri-

<sup>(1)</sup> E. Fermi, questi Rendiconti, vol. XXXI (1922), pp. 184 e 306; Physikalische Zeit., vol. XXIII (1922), pag. 340.

<sup>(2)</sup> F. Hasenöhl, Ann. der Physik, vol. XV (1904), pag. 344, e vol. XVI (1905), pag. 589; K. von Mosengeil, Ann. der Physik, vol. XXII (1907), pag. 867; M. Planck, Berlin. Sitzber. (1907), pag. 542; M. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, vol. II (1920), pag. 341.

<sup>(3)</sup> M. Abraham; loc. cit., pag. 345.

spetto al tempo, cioè alla somma vettoriale delle forze elettromagnetiche  $d\varphi$  agenti sopra le singole parti del sistema; con ciò si viene a porre dunque:

$$(1) \quad F = \int d\varphi.$$

Ma ciò non è esatto, perchè, se si tiene conto della nozione di corpo rigido discussa da uno di noi nel lavoro citato, la forza esterna è data invece dalla relazione

$$(2) \quad F = \int d\varphi \left[ 1 + \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right]$$

essendo  $(\mathbf{P} - \mathbf{O})$  il vettore che ha termine nel punto  $\mathbf{P}$  cui è applicata la forza  $d\varphi$  ed origine in un punto fisso  $\mathbf{O}$ , che possiamo prendere per centro delle coordinate, interno al sistema.

Ora,  $d\varphi$  è la risultante della forza  $d\varphi_1$  esercitata dalla pressione di radiazione che sussisterebbe se la cavità fosse ferma, e di una forza  $d\varphi_2$  causata dalle perturbazioni di detta pressione, dovute al moto della cavità. Applicando la formula (1), si trova che, essendo evidentemente  $\int d\varphi_1 = 0$ , perchè  $d\varphi_1$  è la forza esercitata da una pressione omogenea sopra una superficie chiusa, la forza esterna è

$$(3) \quad F = \int d\varphi_2.$$

Questa forza è precisamente quella calcolata come reazione d'inerzia dagli autori citati, onde

$$(4) \quad \int d\varphi_2 = -\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \mathbf{r}.$$

Invece per la formula (2), tenendo ancora presente che  $\int d\varphi_1 = 0$ , si trova

$$\begin{aligned} F &= \int (d\varphi_1 + d\varphi_2) \left[ 1 + \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right] \\ &= \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} + \int d\varphi_2 + \int d\varphi_2 \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2}. \end{aligned}$$

Trascurando i termini in  $\mathbf{r}^2$  ed osservando che  $d\varphi_2$  è proporzionale a  $\mathbf{r}$ , si può porre semplicemente

$$(5) \quad F = \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} + \int d\varphi_2.$$

La differenza tra (3) e (5) non è *a priori*, in questo caso, trascurabile, benchè contenga  $c^2$  al denominatore, potendo  $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$  divenire molto grande.



come rapporto tra una forza e la sua perturbazione <sup>(1)</sup>. Infatti è  $d\varphi_1 = p n d\sigma$ , dove  $p$  è la pressione di radiazione eguale, come è noto, ad  $\frac{1}{3} \frac{W_0}{V}$ ,  $V$  è il volume della cavità,  $n$  è un vettore unitario colla direzione della normale esterna relativa all'elemento  $d\sigma$ , di coordinate  $(x, y, z)$ , della superficie della cavità.

La componente sull'asse  $x$  del primo integrale di (5) è dunque

$$\begin{aligned} \left[ \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right]_x &= \frac{W_0}{3c^2 V} \int (\mathbf{r}_x x + \mathbf{r}_y y + \mathbf{r}_z z) \cos \widehat{nx} d\sigma \\ &= \frac{W_0}{3c^2 V} \left[ \mathbf{r}_x \int x \cos \widehat{nx} d\sigma + \mathbf{r}_y \int y \cos \widehat{nx} d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{r}_z \int z \cos \widehat{nx} d\sigma \right]; \end{aligned}$$

ma l'immediata applicazione del teorema di Gauss dimostra che

$$\int x \cos \widehat{nx} d\sigma = V, \quad \int y \cos \widehat{nx} d\sigma = \int z \cos \widehat{nx} d\sigma = 0.$$

La nostra componente è perciò  $\frac{W_0 \mathbf{r}_x}{3c^2}$  e quindi

$$\int d\varphi_1 \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} = \frac{W_0}{3c^2} \mathbf{r}.$$

Tenendo presente questa relazione e la (4), si vede che il rapporto tra gl'integrali del secondo membro della (5) è  $-1/4$  e quindi effettivamente non trascurabile.

Sostituendo questi valori nella (5), si trova

$$\mathbf{F} = -\frac{W_0}{c^2} \mathbf{r},$$

da cui la richiesta massa di quiete risulta, conformemente al principio di relatività, eguale a  $\frac{W_0}{c^2}$ .

<sup>(1)</sup> Nel caso delle masse elettromagnetiche si ha  $d\varphi$  eguale alla somma delle forze di Coulomb (che formano la parte preponderante) e delle forze dovute alla accelerazione. Per le prime vale evidentemente anche in questo caso la relazione  $\int d\varphi_1 = 0$ ; ancor esse quindi fanno sentire il loro effetto solo ove si applichi la formula (5) anzichè la (3).

**Chimica.** — *Cloriti di mercurio e di altri metalli* <sup>(1)</sup>. Nota di G. R. LEVI, presentata dal Socio G. BRUNI.

In questa Nota riferisco, a seguito di precedenti lavori su questo argomento <sup>(2)</sup>, su alcuni nuovi cloriti ottenuti e studiati recentemente e precisamente sui cloriti di mercurio, di mercuriammonio, di nichelio e di terre rare.

#### COMPOSTI DI MERCURIO.

L'esistenza dei cloriti di mercurio era già stata prevista in un precedente lavoro <sup>(3)</sup> e dal rapporto fra mercurio e cloro allora trovato si era dedotto che verosimilmente il composto mercurico fosse basico. In questa Nota riferisco in modo più esauriente su questi composti.

*Clorito mercurico*  $\text{Hg}(\text{ClO}_2)_2$ . — Aggiungendo nitrato mercurico ad una soluzione abbastanza concentrata di clorito alcalino o alcalino terroso si ha un precipitato rosso cristallino di aspetto analogo all'ioduro mercurico. La soluzione di nitrato mercurico deve essere acida il meno possibile; le prime porzioni di nitrato mercurico si sciolgono rapidamente nel clorito alcalino, ma quando si è aggiunto circa metà della quantità equivalente di sale mercurico il precipitato persiste. Il precipitato di clorito mercurico si filtra e si lava rapidamente con alcool e dopo pochi minuti, non appena è scomparso l'odore di alcool, viene pesato.

Piccole quantità di sostanza, come quelle che vengono messe sul portaoggetti del microscopio, si conservano inalterate all'aspetto per molte ore, mentre in quantità un po' forti (più di  $\frac{1}{2}$  gr.), dopo un'ora o poco più il prodotto si decompone completamente con aumento di temperatura dando del cloruro mercurico bianco. Se il prodotto è in quantità ancora più notevoli si può avere brusca decomposizione; così una preparazione di circa 8 gr., che era di aspetto inalterato, dopo due ore dalla preparazione si accese spontaneamente senza alcuna azione esterna e formando una densa nube bianca di cloruro mercurico.

Il clorito mercurico non può venire ricristallizzato dall'acqua a caldo perchè si scompone in seno alla soluzione anche a moderato calore. Per percussione allo stato secco il clorito mercurico si decompone con leggera esplosione dando fumi bianchi di cloruro mercurico.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

<sup>(2)</sup> Rendiconti dei Lincei, vol. XXXI, pp. 52, 212, 370; vol. XXXII, pag. 38.

<sup>(3)</sup> G. Bruni e G. R. Levi, *G.*, 45 (II), 170 (1915).

Il clorito mercurico che si ottiene per precipitazione con eccesso di nitrato mercurico contiene sempre mercurio in eccesso; sino a 3 % di più del calcolato e corrispondentemente un minore quantitativo di cloro. In ogni caso però il tenore di mercurio è un po' troppo elevato rispetto al cloro e perciò il prodotto contiene sempre tracce di sale basico.

Analisi:

|              | Calcolato per $\text{Hg}(\text{ClO}_2)_2$ | Trovato |
|--------------|-------------------------------------------|---------|
| % Hg . . . . | 59,79                                     | 60,78   |
| % Cl . . . . | 21,14                                     | 21,07   |

Per l'analisi il sale veniva disciolto in acqua in presenza di nitrito sodico con che avviene la reazione:



e poi la soluzione acidificata con acido nitrico si precipitava con idrogeno solforato; nel filtrato si determinava poi il cloro.

Col cloruro mercurico le soluzioni dei cloriti alcalini o alcalino terrosi, anche concentrate, non danno precipitato.

*Clorito mercurioso*  $\text{HgClO}_2$ . — Le soluzioni di nitrato mercurioso addizionate di un eccesso di clorito alcalino danno un precipitato giallo canarino che lavato con alcool assoluto e rapidamente pesato non appena eliminato l'alcool corrisponde ad un sale un poco basico.

Analisi:

|              | Calcolato per $\text{HgClO}_2$ | Trovato |
|--------------|--------------------------------|---------|
| % Hg . . . . | 74,84                          | 77,02   |
| % Cl . . . . | 13,23                          | 12,57   |

Il prodotto durante il lavaggio con alcool arrossa superficialmente e trattato con nitrito sodico diventa grigio; per ulteriore aggiunta di acido nitrico in eccesso e riscaldamento si ottiene una soluzione completa che si analizza come il sale mercurico sopra descritto.

Come si vede dai risultati analitici, che concordano per diverse preparazioni, il sale è costantemente basico e corrisponde a circa 20 mol. di clorito per una di ossido mercurioso. Anche questo clorito è instabile e si decompone per percussione o riscaldamento, dando un sublimato bianco costituito prevalentemente da cloruro mercurioso.

*Clorito mercurioso basico idrato*  $2\text{HgClO}_2 \cdot \text{Hg}_2\text{O} \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ . — Il sale che si ottiene precipitando un clorito alcalino con eccesso di nitrato mercurioso ha la composizione sopra scritta ed è perciò basico e idrato. È un prodotto giallo crema più chiaro del sale precedente, arrossa anch'esso alla superficie durante il lavaggio; trattato con nitrito sodico non diventa grigio



come il precedente ma rosso mattone, e si scioglie poi per prolungata azione dell'acido nitrico a caldo.

Analisi:

|              | Calcolato<br>per $2\text{HgClO}_2 \cdot \text{Hg}_2\text{O} \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ | Trovato |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| % Hg . . . . | 76,89                                                                                  | 77,60   |
| % Cl . . . . | 6,80                                                                                   | 6,90    |

Il sale si decompone facilmente per riscaldamento o percussione per quanto meno vivacemente del composto precedente.

*Clorito di mercuriammonio*  $\text{NH}_2(\text{HgOHg})\text{ClO}_2$ . — Trattando con ammoniaca una sospensione acquosa di clorito mercurico in acqua, il prodotto ingiallisce rapidamente e si ottiene una sostanza che lavata con alcool e lasciata asciugare all'aria mostra diversa composizione a seconda della quantità di ammoniaca impiegata nella precipitazione.

Analisi:

|                                                                         | % Hg  | % Cl | % N  |
|-------------------------------------------------------------------------|-------|------|------|
| I . . . . .                                                             | 77,93 | 5,57 | 2,69 |
| II . . . . .                                                            | 79,50 | 5,50 | 3,11 |
| III . . . . .                                                           | 83,61 | 3,07 | 4,47 |
| $\text{NH}_4\text{ClO}_2 \cdot 3\text{NH}_2\text{Hg}_2\text{ClO}_2$ . . | 78,48 | 9,25 | 3,65 |
| $\text{NH}_2(\text{HgOHg})\text{ClO}_2$ . . . .                         | 80,13 | 7,08 | 2,80 |
| $\text{HgO} \cdot \text{HOHgNHHgClO}_2$ .                               | 83,90 | 4,94 | 1,95 |

La preparazione I è stata eseguita usando ammoniaca in difetto e conseguentemente il liquido filtrato contiene notevoli quantità di acido cloroso libero che si forma nella reazione; la preparazione II è ottenuta con leggero eccesso e la III con grande eccesso di ammoniaca. Come risulta dai numeri sopra esposti, nessun dato analitico concorda coi valori calcolati per i composti che più verosimilmente avrebbero potuto formarsi. Va osservato che si tratta di sostanze non solo esplosive per percussione, ma anche instabili perchè, subito dopo preparate, sviluppano spontaneamente notevoli quantità di vapori clorosi; la decomposizione diviene più lenta col tempo ed alcune preparazioni conservate per parecchi giorni hanno dato ancora marcatamente le reazioni dell'acido cloroso. Il prodotto II è il solo che, all'atto della preparazione, possa ritenersi essenzialmente costituito dal composto  $\text{NH}_2(\text{HgOHg})\text{ClO}_2$  perchè esso perde rapidamente composti clorosi e questo spiega il minore contenuto in cloro. Il prodotto III non corrisponde al composto che il nitrato ed altri sali di mercurio danno quando vengono trattati con ammoniaca in grande eccesso; specialmente il tenore in azoto risulta assai più elevato. Il prodotto III è meno fortemente esplosivo dei due precedenti.

Il prodotto I non corrisponde al composto che si potrebbe ottenere per analogia col nitrato e con altri sali di mercurio e perciò riassumendo può

dirsi che dalle preparazioni su esposte non può ritenersi accertata che l'esistenza del composto  $\text{NH}_2(\text{HgOHg})\text{ClO}_2$  e cioè del prodotto II ottenuto con leggero eccesso di ammoniaca.

*Clorito di nichelio*  $\text{Ni}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ . — La preparazione di questo clorito presenta qualche difficoltà particolare principalmente per due ragioni: la prima è la sua grande solubilità (le soluzioni ottenute per doppio scambio da clorito di bario molare e solfato di nichelio 2 volte molare non precipitano infatti per aggiunta di alcool), la seconda è che le soluzioni di clorito di nichelio danno facilmente deposito di perossido di nichelio anche se la loro concentrazione viene fatta nel vuoto e a freddo. Perciò per ottenere il clorito di nichelio ho operato così: si mescolano quantità equivalenti di soluzione molare di clorito di bario e di soluzione due volte molare di solfato di nichelio, si filtra e la soluzione avuta si sottopone a congelamento frazionato 5-6 volte in modo da separare ripetutamente ghiaccio puro. Si ottiene così una soluzione più concentrata il cui volume è circa  $\frac{1}{3}$  di quello della soluzione primitiva; questa soluzione concentrata si precipita frazionatamente con alcool assoluto. La prima porzione precipitata è formata da un sale fortemente basico, la seconda da un sale leggermente basico, mentre la terza è praticamente costituita da clorito di nichelio idrato puro. Il prodotto delle singole precipitazioni raccolto su filtro, lavato con alcool ed etere venne analizzato:

|            | Calcolato<br>per $\text{Ni}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ | I prec. | Trovato<br>II prec. | III prec. |
|------------|------------------------------------------------------------------------|---------|---------------------|-----------|
| % Ni . . . | 25,56                                                                  | 29,10   | 25,35               | 25,48     |
| % Cl . . . | 30,89                                                                  | 27,09   | 29,63               | 30,16     |

Il prodotto della I prec. si scioglie in acqua con leggera opalescenza, quelli della II e III prec. si sciolgono completamente e facilmente in poca acqua.

Il clorito di nichelio idrato non esplode facilmente per percussione; per riscaldamento a bagno maria e in quantità notevoli può dare decomposizioni violente: per es. gr. 4 circa di prodotto umido riscaldati a bagno maria diedero inizialmente dei vapori clorosi e dopo qualche istante una esplosione così forte da frantumare il cristallizzatore nel quale era contenuto il sale. Piccole quantità ben suddivise (meno di  $\frac{1}{10}$  di gr.) si possono invece riscaldare senza violenta decomposizione. Le soluzioni di clorito di nichelio per riscaldamento, anche moderato, si decompongono rapidamente con deposito di perossido e svolgimento di vapori clorosi.

È forse superfluo ricordare che non esiste nella letteratura alcun accenno sull'esistenza di cloriti di nichelio.

*Clorito di erbio*  $\text{Er}(\text{ClO}_2)_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ . — L'esistenza dei cloriti di terre rare appare possibile quando si pensi che ho potuto isolare cloriti di basi più deboli come ad es. l'idrato di zinco.

Il clorito di erbio si ottiene infatti per doppio scambio fra solfato di erbio e clorito di bario nei rapporti dovuti: il clorito di bario viene sciolto nella minor quantità possibile di acqua e poi si aggiunge il solfato di erbio  $\text{Er}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  finamente cristallino. Se in precedenza si aggiunge alla miscela una piccola quantità di idrato di bario per dare al prodotto una leggera alcalinità, si ottiene una soluzione perfettamente stabile che non si colora neanche leggermente in giallo, il che sarebbe indice di incipiente decomposizione; con mezz'ora circa di agitazione il doppio scambio è completo, si filtra dal solfato di bario e si precipita il filtrato con alcool in eccesso e frazionatamente; le prime porzioni precipitate contengono notevole quantità di sale basico, le successive sono di sale neutro.

Analisi:

|              | Calcolato<br>per $\text{Er}(\text{ClO}_2)_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ | Trovato |
|--------------|------------------------------------------------------------------------|---------|
| % Er . . . . | 37,93                                                                  | 38,50   |
| % Cl . . . . | 24,06                                                                  | 23,75   |

Il clorito di erbio precipitato dall'alcool è un sale assai debolmente colorato in rosa: dopo asciugamento nel vuoto per eliminare l'alcool, occorre pesare subito il prodotto perchè all'aria inumidisce rapidamente dando sali basici di aspetto gommoso con contemporanea colorazione gialla per formazione di gas clorosi che restano tenacemente occlusi nel prodotto. Le soluzioni acquose non troppo concentrate sono notevolmente stabili e si decompongono molto lentamente anche all'ebollizione. Questo comportamento differenzia i cloriti di terre rare da quelli dei metalli pesanti come zinco, cadmio, rame ecc., le soluzioni dei quali si decompongono assai rapidamente a caldo. Non avrebbe avuto interesse particolare la preparazione di una numerosa serie di cloriti di terre rare trattandosi di elementi così simili fra loro e perciò il sale di erbio può servire come esempio di uno di essi.

Data la notevole stabilità delle soluzioni dei cloriti delle terre rare, è verosimile che per prolungato riscaldamento di soluzioni contenenti cloriti di diversi elementi, si ottenga un frazionamento e che cioè si separino prima sali basici di quelle terre rare che hanno un carattere basico più debole.

In un precedente lavoro sui cloriti di rame e di altri metalli (loc. cit.) mi ripromettevo di svolgere nella Nota successiva le argomentazioni generali riassuntive che si possono trarre dall'esame di un quadro, possibilmente completo di questi composti; debbo nuovamente rimandarle perchè il lavoro non è ultimato.

Ho preparato infatti altri composti e cioè i cloriti di esamincobalto e di cloropentamincobalto, ho in corso di lavoro altri sali di complessi metal-lammonici e tentativi per introdurre il gruppo  $\text{ClO}_2$  nei complessi metallici come residuo non ionizzabile legato direttamente all'atomo del metallo.



**Paleontologia.** — *Sopra un Cuon e una Mustela del Quaternario di Equi (Alpi Apuane).* Nota di D. DEL CAMPANA, presentata dal Socio CARLO DE STEFANI.

Nel compiere delle ricerche sui resti di Carnivori raccolti nella Tecchia e nella Caverna di Equi, ho avuto la fortuna di riscontrare, in quell'importante deposito quaternario, l'esistenza di due specie assai interessanti e rare, delle quali mi piace dar qui alcune brevi notizie.

La prima di queste specie appartiene al Gen. *Cuon* Hodgs., e molto probabilmente è il *Cuon europaeus* Bourg.

Tra i numerosi resti di Canidi della località indicata, che vennero in parte attribuiti al *Canis lupus* Linn., in parte alla *Vulpes vulpes* Linn., ne furono trovati alcuni (due scafo-lunari ed alcuni metacarpali) che non poterono riunirsi a nessuna di queste due specie, sia per le loro dimensioni, intermedie tra l'una e l'altra, sia per differenze morfologiche facilmente apprezzabili.

Tali diversità indussero appunto il prof. De Stefani a segnalare nel deposito di Equi anche il *Canis aureus* Linn. (¹).

Tuttavia un esame accurato dei resti in parola, mi mostrò che si trattava di altra forma di Canide. E poichè l'insieme dei Vertebrati rinvenuti ad Equi rivelava una fauna di clima freddo, mi sorse il dubbio che i resti suddetti, anzichè allo *Sciacallo*, avessero appartenuto al Gen. *Cuon* Hodgs.; le cui specie abitano, di preferenza, i monti più alti e le regioni più fredde dell'Asia settentrionale e centrale e delle principali isole della Malesia.

Che i miei dubbi non fossero infondati, mi venne mostrato da un ferino inferiore sinistro, a corona pochissimo usata, trovato tra i numerosi denti attribuiti al *Canis lupus* Linn. ed avente il carattere peculiare del ferino del Gen. *Cuon* Hodgs. Il qual carattere consiste nell'essere il tallone del dente costituito da una sola cuspid; mentre nel *Canis lupus* Linn. le cuspidi sono due, situate allo stesso livello, l'una sul lato esterno, l'altra sul lato interno.

Avendo poi eseguito dei confronti tra il dente in parola e le specie affini riscontrate allo stato fossile, mi è riuscito facile lo stabilire come il *Cuon europaeus* Bourg. sia quella che si avvicina più delle altre.

Quanto agli altri resti ricordati sopra, poichè nessuno degli autori che hanno studiato i *Cuon* fossili ne ha illustrati di simili, mi sono servito molto utilmente, per riconoscerli, di uno scheletro completo del vivente *Cuon al-*

(¹) De Stefani C., *La grotta preistorica di Equi nelle Alpi Apuane.* Archivio per l'Antropologia e la Etnologia, vol. XLVI, fasc. 1<sup>o</sup>-2<sup>o</sup>, pag. 76 [37], 1914, Firenze.

*pinus* Pall., acquistato dal sig. G. Humlau, naturalista di Amburgo; e dai confronti eseguiti ho ricavato la certezza che quelle ossa appartengono, come il ferino ricordato, al Gen. *Cuon* Hodgs., e con esso, presumibilmente, possono venire riferite al *Cuon europaeus* Bourg.

I resti di *Cuon* provengono, in minima parte, dalla Tecchia, dove furono raccolti a varie profondità da m. 2 a m. 2,50.

Più numerosi invece sono quelli raccolti nella Caverna; e questi, dallo strato superficiale, scendevano fino alla profondità di m. 4.

Debbo anche osservare che, con molta probabilità, quelli da me osservati non sono i soli resti di *Cuon* usciti dal deposito quaternario di Equi; poichè lo scavo eseguito nella Tecchia, circa l'anno 1910, dal sig. Podenzana, mise in luce alcune ossa che il Regalia riconobbe come appartenenti a Carnivori della mole di mezzani *Lupi* <sup>(1)</sup>. Non pare dunque fuor di luogo la mia supposizione che anche queste ossa potessero appartenere al Gen. *Cuon* Hodgs., specialmente per chi ricordi come il compianto Regalia fosse un finissimo osservatore e un peritissimo osteologo.

Col nuovo reperto di Equi, l'area di diffusione del Gen. *Cuon* Hodgs. in Italia si va notevolmente estendendo. Finora le località indicate erano quelle di Monreale presso Cagliari e della Caverna degli Armorari nel Finalese <sup>(2)</sup>.

\* \*

La seconda specie rinvenuta fossile ad Equi è il *Putorius nivalis* Linn. sub-s. *monticola* Cav.

Coloro che si occupano della fauna mammologica italiana, sanno come il Cavazza, compiendo delle interessanti ricerche sui Mustelidi italiani, con un ricchissimo materiale, giungesse a riconoscere nel *Putorius nivalis* Linn. una sottospecie molto piccola, ch'egli distinse coll'appellativo nuovo di *monticola*. E ciò dopo essersi accertato che non si trattava di casi patologici di nanismo, o di infantilismo, causati da azioni di ambiente, ma di una forma realmente costante; la quale si può trovare anche nello stesso *habitat* della specie tipica.

Ecco i caratteri che, secondo il Cavazza, distinguono la nuova varietà <sup>(3)</sup>:  
« La statura è molto più piccola che nella forma tipica e mancano le variazioni intermedie fra gli individui più piccoli della forma comune e i più grandi di questa, così che tali forme vengono ad esser separate l'una dall'altra da parecchie classi di variazione sempre deserte; la reciproca pro-

<sup>(1)</sup> Regalia E., *Fauna glaciale in due grotte di Equi (Alpi Apuane)*. Rivista Italiana di Paleontologia, anno XVII, fasc. I-II, pag. 27, Catania, 1911.

<sup>(2)</sup> Cfr. Boule M., *Les Grottes de Grimaldi (Baoussé rousse)*, t. I, Géologie et Paléontologie, pp. 241-243.

<sup>(3)</sup> Cavazza F., *Dei Mustelidi italiani*. Annali del Museo Civico di Storia naturale di Genova, serie 3<sup>a</sup>, vol. V (XLV), pag. 29 [198], 3 gennaio 1912.

porzione di alcuni organi è assai diversa; l'abito estivo è di colore superiormente variabile, ma la parte bianca è sempre candida e la sua estensione è il più delle volte più larga e regolare che nell'altra; l'abito invernale è sempre tutto bianco candido, ad eccezione dell'apice della coda; lo scheletro si distingue per la sua sottigliezza e gracilità, per la forma del cranio maschile, che è proporzionalmente più allungato, meno largo sulle arcate zigomatiche, meno sviluppato anteriormente, più convesso sulla scatola cranica e sempre con creste appena evidenti; il cranio femminile non differenzia quasi nulla dal cranio maschile, sicchè sono molto meno evidenti i caratteri sessuali secondari ».

A tutto ciò si può aggiungere che il Cavazza, mentre da primo limitò l'*habitat* della nuova sottospecie ai punti più alti della catena delle Alpi Italiane, Svizzere e Tirolesi, in seguito ne accertò la diffusione anche più a oriente, cioè verso i monti Carpazi; sicchè potè asserire che il *Putorius nivalis* Linn. sub-s. *monticola* Cav. è forma di Donnola propria, sebbene non sola, delle alte catene montagnose <sup>(1)</sup>.

Premesse queste brevi notizie, dico che fino da un primo esame dei resti di Mustelidi raccolti nella Tecchia e nella Caverna di Equi, colpirono la mia attenzione varie mandibole e varie ossa di arti che, per la loro piccolezza, scendevano nettamente al di sotto della comune Donnola, pure avvicinandosele notevolmente pei caratteri morfologici.

Il discreto numero di tali resti mi persuase che non poteva trattarsi di una semplice variante individuale; e poichè conoscevo da tempo gli studi interessanti del Cavazza sui Mustelidi italiani, chiesi ed ottenni facilmente dalla sua cortesia una parte del materiale osteologico da lui raccolto.

I confronti eseguiti mi hanno dato modo di accertare l'esistenza, nel deposito quaternario di Equi, del *Putorius nivalis* Linn. sub-s. *monticola* Cav., unitamente alla forma normale; della quale, a giudicare dai resti riconosciuti, non era meno scarsa.

Tali resti, eccettuata una branca di mandibola proveniente dagli strati superficiali della Caverna, furono raccolti nella Tecchia a profondità che variano da m. 0,50 a m. 1,50.

Il Cavazza <sup>(2)</sup> emise l'ipotesi che il *Putorius nivalis* Linn. sub-s. *monticola* sia una forma primitiva ed antica, estesa, nelle epoche trascorse, alla maggior parte dell'Europa centrale; però aggiunse che tale ipotesi potrà essere convalidata soltanto dallo studio dei fossili europei del sottogenere *Arctogale*.

I reperti di Equi costituiscono, a parer mio, una prima prova favorevole alla supposizione di quello studioso.

<sup>(1)</sup> Cavazza F., *Ricerche intorno al Putorius nivalis monticola e alla sua distribuzione geografica*. Bollettino dei Musei di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Torino, vol. XXIX, n. 690, 1914.

<sup>(2)</sup> Cavazza F., *Ricerche ecc.*, pag. 19.



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio SOMIGLIANA legge la seguente commemorazione del Corrisp. ORAZIO TEDONE <sup>(1)</sup>.

La sera del 17 aprile dello scorso anno un uomo sconosciuto veniva trovato in pietose condizioni, steso sopra un binario della stazione di Pisa; aveva gravissime ferite agli arti inferiori, e serie lesioni interne. Trasportato, privo di conoscenza, nella clinica chirurgica del prof. Taddei, dopo una notte di sofferenze, ad onta delle cure più affettuose da parte dei sanitari, spirava verso le ore 10 del mattino successivo, nelle braccia del collega prof. Niccoletti, di cui era riuscito a pronunciare il nome, in un breve intervallo di riacquistata conoscenza, e che, avvertito, era subito accorso al capezzale dell'amico morente.

Così tragicamente, a soli 52 anni d'età, terminava l'esistenza il prof. Orazio Tedone, uno dei più colti, dei più laboriosi, dei più forti analisti, che abbiano onorato la scienza matematica italiana in questo primo quarto di secolo.

Come la terribile disgrazia sia avvenuta, non si è potuto completamente spiegare. Egli proveniva da Genova e sembra che, avvisato improvvisamente di dover cambiare treno, scendesse, anzichè sulla banchina, dalla parte opposta, sopra un binario sul quale giungeva in corsa un altro treno, proveniente da Roma. Da questo egli è stato fatalmente travolto.

Il prof. Orazio Tedone era nato a Ruvo di Puglia il 10 maggio 1870. Cominciò gli studi universitari a Napoli e si laureò a Pisa, ove fu allievo della Scuola Normale Superiore e seguì i corsi del Betti, del Dini, del Bianchi, del Volterra. Fu poi professore titolare di matematica nel R. Istituto Tecnico C. Cattaneo di Milano, ed ebbe in quest'epoca anche un incarico di meccanica superiore nella Università di Pavia. Entrò nell'insegnamento universitario nel 1898, chiamato dalla Facoltà di scienze dell'Università di Genova a coprire la cattedra di analisi superiore. Rimasta vacante nel 1902 la cattedra di meccanica razionale per la chiamata del prof. Morera a Torino, egli assunse quell'insegnamento, assai più conforme agli studi che aveva fino allora coltivato, mantenendo l'incarico di analisi superiore, che più tardi, nel 1906, mutò con quello di fisica matematica.

Egli si trovò, così, completamente nel campo delle proprie ricerche, anche per quanto concerne l'insegnamento, ed in questa posizione rimase fino alla fine della sua carriera, attendendo con alacrità straordinaria alle sue ricerche di analisi e di fisica matematica, che tutta quanta assorbono la sua attività. Solo nel principio dello scorso anno aveva accettato la proposta della Fa-

(1) Seduta del 4 febbraio 1923,

coltà di Napoli di occupare la cattedra di fisica matematica, per ritornare nella regione nativa e nell'Università ove aveva incominciato gli studi. Quel suo ultimo disgraziato viaggio doveva appunto portarlo a Napoli, ove si recava per predisporre il necessario pel trasporto della famiglia.

Fu nominato Socio corrispondente della nostra Accademia nell'anno 1911.

L'operosità scientifica del Tedone si inizia con alcuni lavori d'idrodinamica e di elasticità pubblicati fra il 1893 ed il 1896, che hanno, più che altro, carattere metodologico. Ma nel principio del 1906 la sua attenzione è attratta da una questione che interessava allora grandemente i cultori della fisica matematica, quella della espressione analitica precisa di un principio che, da Huygens in poi, attraverso all'opera classica e fondamentale di Fresnel, aveva avuto le più larghe applicazioni nell'ottica fisica. Una geniale intuizione di Kirchhoff aveva condotto a sintetizzare il principio di Huygens in una formola analitica assai semplice e precisa. Ma la dimostrazione datane da Kirchhoff non soddisfaceva troppo, in quanto era complicata da passaggi al limite, che non sembravano indispensabili, e che presentano sempre qualche difficoltà per essere dimostrati rigorosi. Presso di noi il Maggi prima, poi il Beltrami avevano in varii modi fatto vedere come la formola di Kirchhoff potesse dedursi, con procedimenti di calcolo semplici e perfettamente legittimi, dal gruppo delle formole classiche di Gauss e di Green.

Il Tedone ne diede una nuova dimostrazione, seguendo un concetto che poi doveva dominare gran parte della sua produzione scientifica, quello di considerare il tempo come una quarta variabile spaziale, ed il campo, nel quale la funzione è limitata, come una superficie a tre dimensioni di uno spazio quadridimensionale. In questo modo di vedere egli precorreva i moderni, che, a partire da Minkowski, hanno fatto una larga applicazione, anche dal punto di vista concettuale e filosofico, della idea dello spazio-tempo quadrimensionale, in cui si svolge tutta la fenomenalità fisica. Egli però vi era stato portato dall'idea di generalizzare un metodo usato con successo dal Volterra nello studio della propagazione delle onde cilindriche. In questo caso lo spazio-tempo è uno spazio a tre dimensioni, perfettamente intuibile geometricamente, e la rappresentazione geometrica ordinaria viene così in soccorso della ricerca analitica.

Altra cosa è per lo spazio a quattro dimensioni, a cui non possiamo arrivare se non con uno sforzo di astrazione. Ad ogni modo, il Tedone poté giungere per questa via alla formola di Kirchhoff e prepararsi i materiali per l'applicazione del suo metodo a problemi ben più ardui e complicati.

Prima però di trattare queste applicazioni che portarono il Tedone a risultati completamente originali, voglio ricordare un lavoro da lui pubblicato in quest'epoca nei Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, e che riguarda la teoria degli spazi a curvatura costante.

In esso appare per la prima volta la grande abilità analitica che costituì la virtù forse prevalente nella sua opera scientifica. Egli infatti seppe sempre affrontare i calcoli più pesanti e più complicati con un chiaro intuito e con una

serena imperturbabilità, quali ben raramente si riscontrano nei cultori della analisi. Anzi questa virtù straordinaria spinse forse sino a quel limite, oltre il quale cessa di essere una virtù, poichè, obbligando il lettore a sforzi a cui non è abituato, finisce col distorglielo dall'opera stessa. Nella ricerca matematica noi apprezziamo soprattutto quella forza d'intuizione che, cogliendo dall'alto rapporti imprevisi, porta alle volte con meravigliosa rapidità a risultati a cui col calcolo diretto non si può giungere se non con estrema fatica. Nelle ricerche del Tedone non mancano risultati brillanti ottenuti con minimo sforzo; ma spesso egli li scopre, dopo essere già arrivato allo scopo finale coi suoi procedimenti prediletti, estremamente laboriosi.

Nel lavoro in discorso egli si propone di fondare la teoria generale degli spazi a curvatura costante di un numero qualsiasi di dimensioni, definendoli come quegli spazi nei quali è possibile il movimento rigido. Questo, alla sua volta, vien definito come il movimento corrispondente a spostamenti per cui risultano nulli tutti i coefficienti che definiscono la dilatazione dell'elemento lineare. Potè così costruire le equazioni differenziali che definiscono lo spazio, e ritrovare per questo le forme consuete dell'elemento lineare dovuto a Riemann, Beltrami e ad altri geometri. Questo risultato completa le ricerche classiche di Riemann, mostrando che la possibilità del movimento rigido (la quale secondo quel grande geometra è una proprietà degli spazii a curvatura costante) è anche sufficiente a caratterizzare tali spazi.

La poderosa Memoria che ha per titolo *Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei ed isotropi*, e che fu pubblicata nelle memorie della R. Accademia di Torino nel 1897, contiene uno dei risultati più notevoli a cui sia arrivato il nostro analista ed è tipica per il metodo da lui inizialmente seguito e che non differisce sostanzialmente da quello già seguito nella dimostrazione della formola di Kirchhoff. Il risultato finale è la estensione della rappresentazione di Kirchhoff alle vibrazioni più generali che possano avvenire in un mezzo elastico omogeneo ed isotropo, problema assai arduo a risolversi per la grande complicazione analitica, aumentata forse, anzichè diminuita, dalla considerazione dello spazio quadridimensionale.

La questione era stata trattata primamente dal Cerruti <sup>(1)</sup>, il quale non era arrivato alla soluzione definitiva per una deficienza di calcolo, ma aveva precorso il Kirchhoff stesso, poichè la sua Memoria precede di due anni quella classica del fisico tedesco *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, pubblicata nel *Sitzungsberichte* della Accademia delle Scienze di Berlino nel 1882.

Il Tedone, non smarrendosi attraverso calcoli estremamente complicati, riuscì a trovare una rappresentazione del vettore vibrante in un mezzo elastico isotropo per mezzo di integrali definiti, che è analoga alla celebre formola di Kirchhoff, ed a dimostrare così la possibilità della estensione del principio di Huygens alla propagazione di onde in tali mezzi. Sarebbe stata interessante

(1) Cerruti. *Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi*. Memorie della R. Accademia dei Lincei, s. III, vol VIII, 1880.



una più profonda interpretazione delle formole sotto questo punto di vista, per meglio chiarirne il significato meccanico. Ma il nostro autore ebbe sempre di mira più il lato analitico che quello fisico delle questioni, e si occupò invece, alla fine della sua grande Memoria, di trovare delle dimostrazioni più semplici delle sue formole, lasciando da parte lo spazio a quattro dimensioni.

Una forma più comprensiva delle formole stesse fu in seguito trovata dal Love, nel 1904, riattaccandola ad un elemento di immediato significato meccanico, cioè alla vibrazione elementare prodotta in un mezzo indefinitamente esteso per effetto di una forza agente in un punto fisso e secondo una direzione fissa, vibrazione che era stata determinata da Stokes. Il Tedone poté però dimostrare che anche le formole del Love potevano essere dedotte dalle sue, per cui in ultima analisi il merito e la priorità della estensione della formola di Kirchhoff alle equazioni delle vibrazioni dei mezzi isotropi resta al Tedone.

Una lunga serie di lavori il nostro matematico ha dedicato ai problemi dell'equilibrio elastico. Egli è riuscito a trovare molte e notevoli estensioni delle soluzioni del tipo di quelle, ben note anche ai tecnici, che sono dovute al De-Saint Venant. Ma più lo attrassero i problemi di carattere generale, quelli cioè in cui gli elementi che determinano la deformazione sul contorno del corpo sono rappresentati da funzioni qualsiasi, solo soggette alle condizioni della continuità, secondo l'indirizzo seguito dapprima dal Lamé.

Dopo aver tentato varie vie nella trattazione di problemi speciali, il Tedone pervenne ad alcune formole assai semplici e notevoli, sulle quali poté basare un metodo generale d'integrazione, e ritrovare con procedimento uniforme tutte le soluzioni già note, e poi costruirne anche alcune completamente nuove.

Il concetto semplicissimo da cui egli è partito, e che è esplicitamente formulato nella prima delle tre ampie Memorie che ha dedicato alla statica elastica, negli *Annali di matematica* (la prima nel 1902, la seconda nel 1904, la terza nel 1910), è il seguente: Le equazioni dell'equilibrio elastico nel caso della isotropia possono porsi sotto forma di equazioni di Laplace, quando si prenda per funzione incognita una combinazione lineare della componente di spostamento e della dilatazione cubica. Supposta conosciuta la funzione di Green, o la sua analoga detta di Thomson, per lo spazio occupato dal corpo, è allora possibile una rappresentazione del vettore-spostamento mediante integrali che sono estesi alla sola superficie del corpo e risultano così immediatamente eliminati quegli integrali di spazio, la cui presenza costituisce uno dei maggiori ostacoli alla integrazione.

Resta ancora nelle formole, come elemento non conosciuto, la dilatazione cubica. Ma dalle formole stesse, mediante derivazioni, è possibile ricavare una relazione che può essere considerata come un'equazione integrale sufficiente a determinare anche questa funzione; e in molti casi questa equazione può essere effettivamente risolta e la deformazione risulta, così, completamente conosciuta.

Le formole che costituiscono il punto di partenza del metodo d'integrazione ideato dal Tedone sono le seguenti

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} (\xi - x) \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \\ v &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} v \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} (\eta - y) \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \\ w &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} w \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} (\zeta - z) \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \end{aligned}$$

ove  $(u, v, w)$  è il vettore-spostamento,  $\theta$  la dilatazione,  $G$  la funzione di Green,  $(x, y, z)$  il punto nel quale si calcola la deformazione,  $(\xi, \eta, \zeta)$  il punto variabile nel campo d'integrazione,  $n$  la normale interna,  $\lambda$  e  $\mu$  le costanti di Lamé.

Queste formole mettono in luce netta il legame che esiste fra il problema statico-elastico ed il problema di Dirichlet, legame solo adombrato nei metodi classici. Mediante di esse il Tedone ha ricostruito la soluzione del problema pel caso del suolo, della sfera, della lastra piana, dell'involucro sferico, ed ha dato le nuove soluzioni per l'ellissoide di rotazione e per il cono. Esse, per l'ampiezza delle applicazioni di cui sono suscettibili, per la semplicità con cui possono essere stabilite, meritano di portare il nome del Tedone e costituiscono un risultato che resterà fra i più notevoli della statica elastica.

Considerando ora la grande fatica che ha speso il nostro matematico intorno a queste soluzioni generali dei problemi elastici, ci sovengono le parole di grande fiducia nella loro efficacia applicativa, che esprimeva il Lamé, il quale ne fu uno dei più fervidi promotori. E vien fatto di domandarci quali siano state le applicazioni ai problemi della tecnica costruttiva, che possano giustificare tanto lavoro di analisi e di calcolo. Pur troppo la risposta è quasi negativa; ma ciò forse non proviene da una ragione intrinseca, quanto da quella separazione e reciproca incomprensione, che regnano ancora in questo campo fra teorici e tecnici. Cosicchè, mentre i primi non si accostano se non raramente ai problemi della realtà, preferendo problemi artificiali o troppo generali, per gli altri possono forse ripetersi ancora le parole, con cui il Lamé chiude la 19<sup>a</sup> delle sue *Lezioni sulle coordinate curvilinee*, che essi cioè *préfèrent et prônent des procédés hybrides, mi-analytiques et mi-empiriques, ne servant qu'à masquer les abords de la véritable science*.

Il lungo studio dedicato alle equazioni delle vibrazioni elastiche ed a molte altre equazioni di tipo iperbolico più generali aveva dato al Tedone un'ottima preparazione per rivolgersi al gruppo delle equazioni del campo elettromagnetico, nella forma di Maxwell-Hertz, che egli considerò anche come un caso speciale delle prime. Esse costituiscono il sistema di equazioni che, sotto forma assai semplice, racchiudono le leggi del più ampio sistema di fenomeni fisici che noi conosciamo, almeno secondo le nostre cognizioni attuali.

L'ultimo gruppo di lavori, a cui il Tedone si dedicò con entusiasmo in questi ultimi anni della sua attività scientifica, riguarda la integrazione delle equazioni di Maxwell-Hertz, e le applicazioni che si possono ricavare dalle più generali forme degli integrali per l'ottica elettro-magnetica.

Studiò dapprima un problema particolare, la determinazione completa del campo elettro-magnetico, quando il problema dipende geometricamente da una sola variabile. Supposte note le condizioni iniziali; supposto che non esistano cariche elettriche, nè momenti magnetici, ma solo correnti elettriche, egli arriva alla determinazione completa del vettore elettrico e magnetico.

Ma il risultato più notevole che egli abbia raggiunto in questo ordine di ricerche è costituito da un gruppo di formole che sono analoghe a quella celebre di Kirchhoff, ed a quelle di cui si era così a lungo occupato per la estensione del principio di Huygens alla propagazione delle onde nei mezzi isotropi.

Studia dapprima un problema di particolare interesse fisico, la determinazione del campo elettro-magnetico quando si conosce il vettore delle correnti elettriche. Riattacca dapprima il problema a quello della propagazione delle onde elastiche; e col suo procedimento prediletto, trasportando la questione nello spazio quadridimensionale, cerca le formole di rappresentazione per integrali definiti. Ma nella seconda Nota, dedicata a questo studio, riportando le formole nello spazio ordinario, arriva ad una forma estremamente semplice ed intuitiva che costituisce uno dei risultati più interessanti in questo campo di ricerche.

Il vettore elettrico ed il vettore magnetico vengono rappresentati mediante un vettore tangente alla superficie che delimita lo spazio che si considera, e che è determinato dalla conoscenza del vettore elettrico e magnetico sulla stessa superficie.

È questo un risultato che io credo appartenga per intero al Tedone, quantunque non sia facile il determinare quale relazione possa avere colle molte ricerche apparse nell'epoca attuale su questo argomento. Ma ciò che maggiormente interessa è che il nostro autore, vincendo in certo modo sè stesso, riesce a trovare una dimostrazione delle sue formole che ha una semplicità ed eleganza non più superabili. Giova ricordare quelle formole.

Siano  $X, Y, Z$  le componenti della forza elettrica;  $L, M, N$  quelle della forza magnetica; sia  $s$  la superficie che limita il campo e si costruiscano i potenziali ritardati:

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_s [Y\gamma - Z\beta] \frac{ds}{r} & Y_1 &= \int_s [Z\alpha - X\gamma] \frac{ds}{r} & Z_1 &= \int_s [X\beta - Y\alpha] \frac{ds}{r} \\ L_1 &= \int_s [M\gamma - N\beta] \frac{ds}{r} & M_1 &= \int_s [N\alpha - L\gamma] \frac{ds}{r} & N_1 &= \int_s [L\beta - M\alpha] \frac{ds}{r} \end{aligned}$$

ove,  $\alpha, \beta, \gamma$  indicano i coseni di direzione della normale interna del campo, e le parentesi [ ] il solito cambiamento del tempo. Si ha allora, indicando con  $E$



il vettore elettrico, con  $H$  il vettore magnetico,

$$-4\pi E = \text{rot}(X_1, Y_1, Z_1) - \frac{\mu}{c} \frac{d}{dt}(L_1, M_1, N_1)$$

$$-4\pi H = \text{rot}(L_1, M_1, N_1) + \frac{\varepsilon}{c} \frac{d}{dt}(X_1, Y_1, Z_1)$$

ove  $\varepsilon$  è la costante dielettrica,  $\mu$  la permeabilità magnetica,  $c$  la velocità della luce.

Un'applicazione sistematica di queste formole può condurre ad estendere all'ottica elettro-magnetica i metodi dell'ottica fisica, ed il Tedone ne ha dato un esempio notevole preparando i materiali occorrenti per lo studio dei fenomeni di diffrazione.

Devo necessariamente lasciar da parte molti lavori sopra argomenti speciali, di cui non potrei parlare se non entrando in troppo minuti particolari.

Ricorderò solo l'esauriente discussione dell'equazione che serve a determinare le soluzioni dell'equazione di Laplace di tipo simmetrico e che si presentano sotto la forma del prodotto di tre funzioni di una sola variabile, come avviene per le funzioni di Lamé. Questa discussione è stata oggetto di una interessante comunicazione al 4° Congresso dei matematici, tenutosi qui nella nostra Accademia nell'aprile del 1908.

La rivista, necessariamente rapida, che abbiamo fatto della vasta opera di Orazio Tedone, può forse bastare a fissare i principali lineamenti della sua personalità, ed a metterne in luce i punti più salienti, quelli a cui sono collegati i risultati suoi, che debbono restare nella scienza, che noi italiani abbiamo il dovere di segnare come parte integrante del patrimonio della nostra cultura nazionale. Ma non possono bastare a dare un'idea adeguata del lavoro enorme di analisi e di calcolo che è stato compiuto da questo infaticabile ricercatore, tutto assorto nei suoi studi per quasi un trentennio, tutto dedicato alla scienza ed alla sua piccola famiglia.

Alla vedova ed al figlio, così tragicamente privati del loro sostegno, così amaramente colpiti nell'affetto più intimo, va oggi il compianto della nostra Accademia nazionale e della scienza italiana.

Lavoratore formidabile, il Tedone dovette trovare soltanto in sè stesso la spinta all'opera sua. Poichè egli visse scientificamente quasi isolato. Non ricca di quei caratteri estetici che avvicinano qualche opera di matematica alle opere artistiche, raramente vivificata dal contatto colla realtà fisica, la sua produzione non diede, come poteva, l'impulso a nuove operosità; ed egli ebbe, non senza ragione, la sensazione di non essere abbastanza apprezzato.

Così la frase sconsolata che il collega angosciato ci disse di aver raccolto ultima sul suo labbro, la frase *Quando uno nasce sfortunato....*, ci appare come la sintesi dolorosa di una vita altamente degna e ci riempie l'animo di tristezza.

Io mi auguro che i matematici italiani riprendano i lavori del Tedone, sorpassandone le faticose forme esteriori, ne mettano in luce i pregi sostanziali e ne facciano, come è possibile, il punto di partenza di nuove ricerche. Sarà opera feconda e doverosa verso il modesto ed eminente cultore delle nostre discipline, e la migliore, sebbene tardiva, ricompensa di una vita tutta consacrata alla ricerca, con coscienziosità scrupolosa, con generosità illimitata.

## ELENCO DEI LAVORI DEL PROF. ORAZIO TEDONE

### RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI.

1. *Sul moto di un fluido contenuto in un involucro solido ellissoidico*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. II, 1<sup>o</sup> sem., 1893.
2. *Sulla linea elastica*; Ser. 5<sup>a</sup>, vol. III, 1<sup>o</sup> sem., 1894.
3. *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huygens*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. V, 1<sup>o</sup> sem., 1896.
4. *Sulla integrazione delle equazioni dell'elasticità*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. V, 2<sup>o</sup> sem., 1896.
5. *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. V, 2<sup>o</sup> sem., 1896.
6. *Sulla deformazione delle piastre di grossezza finita*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. X, 1<sup>o</sup> sem., 1901.
7. *Su alcuni problemi di equilibrio elastico*, (2 Note), Ser. 5<sup>a</sup>, vol. X, 2<sup>o</sup> sem., 1901.
8. *Sul problema dell'equilibrio elastico in un cilindro circolare indefinito*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XIII, 1<sup>o</sup> sem., 1904.
9. *Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XIV, 1<sup>o</sup> sem., 1904.
10. *Sull'equilibrio di un corpo limitato da un cono di rotazione*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XIV, 1<sup>o</sup> sem., 1904.
11. *Un teorema sulle equazioni dell'elasticità*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XIV, 2<sup>o</sup> sem., 1907.
12. *Il problema di Lamé per sistemi triplo-conici*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XVII, 1<sup>o</sup> sem., 1908.
13. *Sulla torsione di un cilindro di rotazione*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XX, 2<sup>o</sup> sem., 1911.
14. *Sulla deformazione di un cilindro di rotazione*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXI, 1<sup>o</sup> sem., 1912.
15. *Sul pendolo a sospensione elastica*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXII, 1<sup>o</sup> sem., 1913.
16. *Sulla integrazione della equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXII, 1<sup>o</sup> sem., 1913.
17. *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII, 1<sup>o</sup> sem., 1914.
18. *Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII, 1<sup>o</sup> sem., 1914.
19. *Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII, 1<sup>o</sup> sem., 1914.
20. *Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti di secondo ordine*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII, 2<sup>o</sup> sem., 1914.
21. *Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIV, 1<sup>o</sup> sem., 1915.
22. *Campi elettro-magnetici dipendenti da una sola coordinata*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIV, 2<sup>o</sup> sem., 1915.
23. *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell*, Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXV, 1<sup>o</sup> sem., 1916, (Nota I, II).

24. *Sul principio di Huygens in un campo elettro-magnetico*, Ser. 5ª, vol. XXVI, 1º sem., 1917.
25. *Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici*, Ser. 5ª, vol. XXVI, 1º sem., 1917.
26. *Sulla maniera di stabilire le formole fondamentali della ordinaria teoria della diffrazione*, Ser. 5ª, vol. XXVII, 1º sem., 1918.
27. *Sulle ovali di Cartesio come curve aplanatiche di rifrazione*, Ser. 5ª, vol. XXVII, 1º sem., 1918.
28. *Sui fenomeni di diffrazione di Fraunhofer*, Ser. 5ª, vol. XXVIII, 1º Sem., 1919.
29. *Su alcune formole d'inversione collegate col metodo d'integrazione di Riemann*, Ser. 5ª, vol. XXVIII, 1º sem., 1920.

ATTI DEL IV CONGRESSO DEI MATEMATICI, ROMA, 1909.

1. *Sul problema di Lamé*.

ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

1. *Allgemeine Theorie der mathematischen Elasticitätslehre* (Integrationstheorie). tom. IV, 1907.
2. *Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper*, id. id. (in collaborazione con A. Timpe).

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA, 1894.

1. *Il moto di un ellissoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet*.

NUOVO CIMENTO.

1. *Sopra i casi in cui il problema del moto di un corpo rigido si riduce alla quadratura*, vol. IV, tom. 1º, 1895.
2. *Sulle formole che rappresentano lo spostamento di un punto di un corpo elastico in equilibrio*, vol. IV, tom. 2º, 1900.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

1. *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi*, ser. II, tom. 47, a. 1897.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

1. *Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici*, vol. 35, a. 1900.
2. *Sui problemi di equilibrio elastico a due dimensioni*, tom. 41, a. 1904-1905.
3. *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*, tom. 42, a. 1906-1907.
4. *Sull'estensione dell'integrale di Poisson relativo alla equazione dei potenziali ritardati al caso della isotropia elastica*, tom. 42, a. 1906-1907.

ANNALI DI MATEMATICA.

1. *Sull'integrazione dell'equazione*  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$ , ser. III, tom. 1, 1898.
2. *Su di un sistema di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche*, ser. III, tomo 1, 1898.
3. *Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo*, Memoria I, ser. III, tom. 8º, a. 1902; memoria II, ser. III, tom. 10º, a. 1904; memoria III, ser. III, tom. 17, a. 1910.
4. *Sui metodi della fisica matematica*, ser. III, tom. 15º, a. 1908.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO.

1. *Sulla teoria degli spazi di curvatura costante*, ser. II, vol. 32º, a. 1899.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

1. *Sulle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo con speciale riguardo alle forze di massa e su alcuni problemi relativi alla sfera elastica*, tom. 17º, a. 1903.
2. *Sull'equilibrio di una piastra elastica, isotropa, indefinita*, tom. 18º, a. 1904.
3. *Sul problema dell'equilibrio della temperatura in un ellissoide a tre assi disuguali*, tom. 24º, a. 1907.



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*Presentate nella seduta del 4 febbraio 1923.*

- ABETTI G. — Determinazioni astronomiche di latitudine (Spedizione italiana De Filippi nell'Himalaia), vol. I. Bologna, 1922. 4°, pp. 1-182.
- ALESSIO A. — Determinazioni astronomiche di latitudine (Spedizione italiana De Filippi nell'Himalaia), vol. I. Bologna, 1922. 4°, pp. 1-182.
- ALOISI P. — Calcite di Cerchiara (Estr. dalle « Memorie della Società Lunigianese G. Capellini », vol. II). Spezia, 1921. 8°, pp. 1-3.
- ALOISI P. — Il giacimento di molibdenite di Bivongi. Roma, 1922. 8°, pp. 1-5.
- ALOISI P. — I materiali refrattari italiani (Estr. dagli « Atti della Società italiana per il progresso delle scienze »). Roma, 1919. 8°, pp. 1-18.
- ALOISI P. — Su di alcuni giacimenti di minerali di manganese della Toscana e della Liguria. Roma, 1922. 8°, pp. 1-14.
- ANDOYER H. — Cours d'astronomie; tome I. Paris, 1923. 8°, pp. 1-455.
- D'ACHIARDI G. — Alla memoria del prof. Ernesto Manasse (21 gennaio 1875-9 novembre 1922). Pisa, 1922. 8°, pp. 1-10.
- D'ACHIARDI G. — Borate (Separat aus « Handbuch der Mineralchemie », Band III, pp. 401-435). Leipzig, 1922. 8°.
- D'ACHIARDI G. — Discorso inaugurale del presidente Giovanni D'Achiardi nel XXXII congresso della Società geologica italiana (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XL). Roma, 1921. 8°, pp. 1-22.
- D'ACHIARDI G. — I giacimenti italiani dei minerali di rame, antimonio, mercurio e stagno (Estr. dagli « Atti della Società italiana per il progresso delle scienze », 1919). Roma, 1920. 8°, pp. 1-14.
- D'ACHIARDI G. — La miniera del Bottino nelle Alpi Apuane (Estr. dalle « Memorie della Soc. Lunigianese G. Capellini », vol. I). Sarzana, 1920. 8°, pp. 1-8.
- DAINELLI G. — Studi sul glaciale, vol. III (testo e tavole). Bologna, 1922. 4°; pp. i-vii, 1-658.
- DE BROGLIE M. — Exposé concernant les résultats actuels relatifs aux éléments isotopes (Publications de la Société de chimie-physique, n. XI). Paris, 1922. 8°, pp. 1-15.
- DRUMAUX P. — L'évidence de la théorie d'Einstein. Paris, 1923. 8°, pp. 1-72.
- EREDIA F. — Osservazioni pluviometriche raccolte a tutto l'anno 1915; voll. I, II, III. Roma, 1920-22. 4°, pp. 1-83, 1-57, 1-96, 1-80, 1-68, 1-154, 1-79, 1-510, 1-52, 1-455, 1-44.
- GUYE PH. A. — Biographie par R. Chodat (Extr. des nécrologies des « Actes de la Société helvétique des sciences naturelles », partie II). Berne, 1922. 8°, pp. 1-16.
- KRICHEWSKY S. — A method of curve fitting. Cairo, 1922. 8°, pp. 1-17.
- LINNÉ VON CARL. — Bref och Skrifvelser; del VIII. Uppsala, 1922. 8°, pp. 1-200.
- LUSTIG A. — Generalità e storia della anafilassi (Estr. dal volume « Anafilassi », edito dell'Istituto sieroterapico milanese). Firenze, 1922. 8°, pp. 1-23.
- LUSTIG A. — Studien und Beobachtungen über die Pellagra (Sonderab aus « Deutsches Archiv für klinische Medizin », Band 140, pp. 342-357). Leipzig, 1922. 8°.
- SEE T. F. F. — Determination of the physical cause which has established the unsymmetrical equilibrium of the Earth's solid nucleus in the fluid Enve-

lope (Abdr. aus den « Astr. Nachr. », Band CCII, pp. 338-366). Kiel, 1916. 4°.

SEE T. F. F. — Discovery of the cause of the Sunspot, and of their 11-year periodicity, and of the cause of the cepheid, geminid, and cluster variable stars. Discovery of the cause of the Mira variable stars (Abdruck aus den « Astr. Nachr. », Band CCXVI, pp. 194-259). Kiel, 1922. 4°.

SEE T. F. F. — Researches on the figure of the earth, with definitive determination of the oblateness, and complete tables of the corresponding terrestrial spheroid (Abdr. aus den « Astr. Nachr. », Band CCXIII, pp. 234-262). Kiel, 1921. 4°.

TEODORO G. — Coccidologica V-VI (estr. dal « Redia », vol. XV). Firenze, 1923. 8°, pp. 1-3.

G. C.